

CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO



CURSO DE FISICA

TEMA 16: Rotación de un Cuerpo Rígido Alrededor de un Eje Fijo

CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

Contenido

OBJETIVOS	3
Objetivos generales.....	3
Objetivos específicos.....	3
9.1 MOVIMIENTO DE ROTACION DEL CUERPO RÍGIDO	4
9.2 CINEMATICA DE ROTACION.....	5
9.2.1 CANTIDADES CINEMATICAS ROTACIONALES: DESPLAZAMIENTO, VELOCIDAD Y ACELERACION ANGULARES.	5
9.3 ROTACION CON ACELERACIÓN ANGULAR CONSTANTE.....	8
9.4 RELACION ENTREMAGNITUDES CINEMÁTICAS LINEALES Y ANGULARES PARA UNA PARTICULA EN MOVIMIENTO CIRCULAR.....	10

CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

OBJETIVOS

Objetivos generales

Que el estudiante:

- 1) Explique el concepto de rotación del cuerpo rígido y aplique las ecuaciones respectivas del movimiento circular a la resolución de problemas.
- 2) Realice transformaciones de magnitudes lineales a partir de las angulares y viceversa.

Objetivos específicos

El estudiante:

- 1) Explicará que es un cuerpo rígido.
- 2) Explicará en que consiste la rotación de un cuerpo rígido.
- 3) Definirá el desplazamiento angular, velocidad angular y aceleración angular.
- 4) Aplicará los conceptos anteriores a la resolución de problemas.
- 5) Explicará cuando un movimiento de rotación es con aceleración angular constante.
- 6) Resolverá problemas de rotación con aceleración angular constante.
- 7) Para una partícula de un cuerpo en rotación calculará las magnitudes lineales y angulares que se le soliciten.

CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

9.1 MOVIMIENTO DE ROTACION DEL CUERPO RÍGIDO

Se entiende por rotación pura, al giro de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo en un marco de referencia inercial. Un cuerpo rígido es aquel que tiene forma y tamaño definido y que no cambia cuando está sometido a fuerzas externas. La separación entre partículas que constituyen el cuerpo rígido es constante. El cuerpo rígido es un concepto idealizado, en mayor o menor grado los cuerpos en la realidad son deformables.

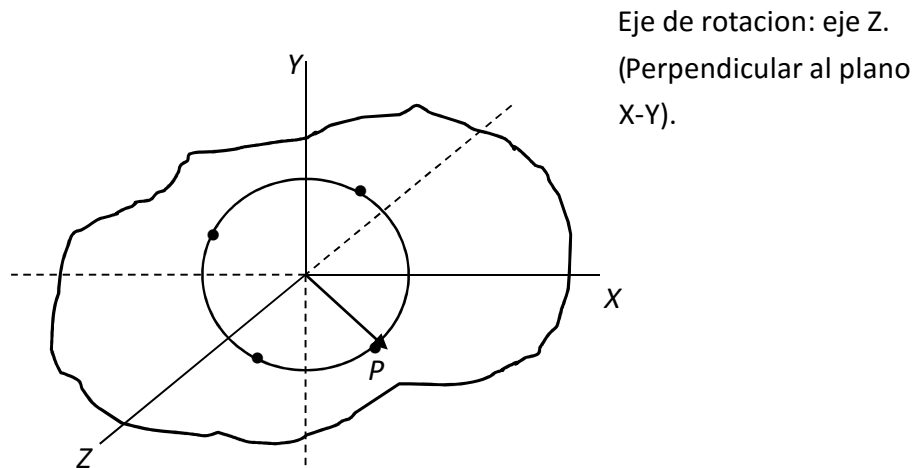


fig 9.1 Cuerpo rígido en rotación
al rededor del eje Z.

Observe que la partícula "p" al rotar el cuerpo rígido describe una trayectoria circular con centro en el eje de rotación. Algunos ejemplos de cuerpos rígidos en rotación son:

- i. Rueda de bicicleta, carro o camión
- ii. Aspas de un ventilador
- iii. Un CD etc.

9.2 CINEMATICA DE ROTACION

9.2.1 CANTIDADES CINEMATICAS ROTACIONALES: DESPLAZAMIENTO, VELOCIDAD Y ACELERACION ANGULARES.

La cinemática de rotaciones la descripción del movimiento de rotación de un cuerpo rígido en base al desplazamiento, velocidad y aceleración angulares.

Desplazamiento angular: $\Delta\theta$

El desplazamiento angular de un cuerpo rígido describe la cantidad que este rota.

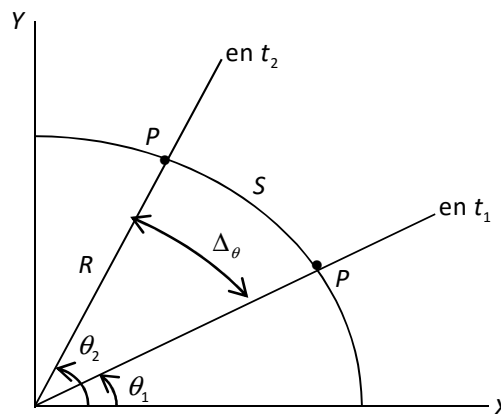


fig 9.2 Desplazamiento angular de P.

El desplazamiento angular $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, $\Delta\theta$ es un ángulo. Hay varias formas de medir este ángulo tales como grados, revoluciones ($1\text{ rev} = 360^\circ$). Una forma adecuada de expresar el desplazamiento angular es el radian (rad). Un ángulo de 1 rad es un ángulo central cuyo arco "S" es igual en longitud al radio R.

$$\theta = \frac{s}{R}; \theta = \frac{2\pi R}{R}; \theta = 2\pi \text{ rad}$$
$$1\text{ rev} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

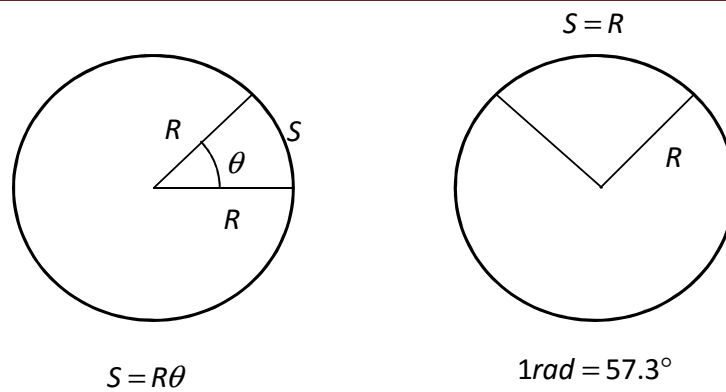


fig 9.3 muestra que $S=R\theta$,
y que si $S=R$ se define 1 rad

Velocidad angular: ω

A la razón de cambio del desplazamiento angular con respecto al tiempo se le llama velocidad angular. La velocidad angular media o promedio se expresa así:

$$\bar{\omega} = \omega_{prom} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} ; \quad \omega \text{ se expresa en } \frac{rad}{s}$$

O $\frac{rev}{s}$ o en revoluciones por minuto (rpm). La velocidad angular tiene dirección y sentido y se localiza en el eje de rotación. Esto se ilustra en la fig 9.4 a) y b).

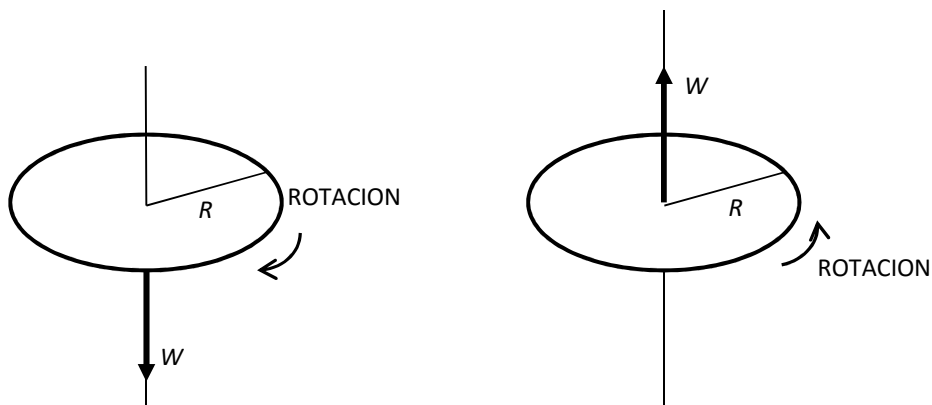


Fig 9.4 a) rotacion en el
sentido de las
agujas del reloj

b) rotacion en el
sentido contrario
a las agujas del reloj

CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

Si la referencia “f” se expresa en rev/s entonces utilizando $W = 2\pi f$, al sustituir f el resultado se expresa en rad/s si f se expresa en r.p.m para obtener rad/s se procede así:

$$W = \left(\frac{2\pi}{60}\right)f$$

Donde $\frac{2\pi}{60}$ es el factor de conversión de r.p.m a rev/s

Aceleración angular: α

De igual forma que el movimiento rectilíneo, el movimiento rotacional puede ser uniforme ($\alpha = 0$) o acelerado ($\alpha \neq 0$). La velocidad angular (W) puede cambiar de W_0 a W bajo la influencia de un momento de torsión (τ) resultante.

$$\bar{\alpha} = \alpha_{prom} = \frac{W - W_0}{t} ; \quad \alpha : \frac{\text{rad/s}}{s} = \text{rad/s}^2$$

En la expresión anterior W cambia de W_0 a W en un tiempo t. La aceleración angular se localiza en el eje de rotación.

9.3 ROTACION CON ACELERACIÓN ANGULAR CONSTANTE.

La aceleración angular se puede ilustrar en la fig 9.5 a) y b)

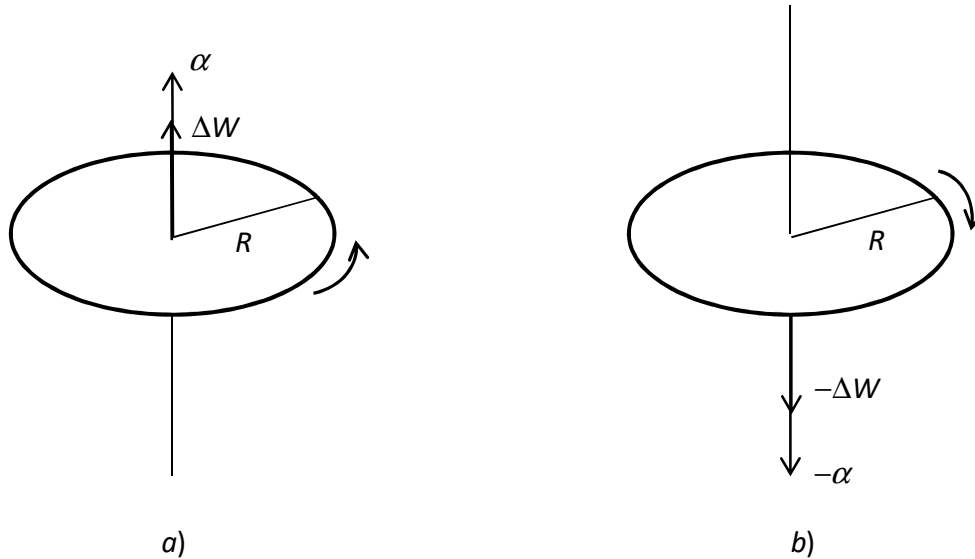


fig 9.5

De la definición de $\alpha_{prom} = \frac{W - W_0}{t}$, se obtiene

$$W - W_0 = \alpha t$$

$$W = W_0 + \alpha t$$

Si α es constante, tanto el valor promedio como el instantáneo tiene el mismo valor.

Se define
$$W_{prom} = \frac{W_0 + W_f}{2}$$

pero
$$\bar{W} = \frac{\Delta\theta}{t} = \frac{W_0 + W}{2}$$

$$\theta - \theta_0 = \left(\frac{W_0 + W}{2}\right)t$$

$$\theta = \theta_0 + \left(\frac{W_0 + W}{2}\right)t$$

CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

Sabiendo que $W = W_0 + \alpha t$ y sustituyendo en la expresión anterior.

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{2}[W_0 + W_0 + \alpha t]t$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{2}[2W_0 + \alpha t]t$$

$$\theta = \theta_0 + W_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

De $W = W_0 + \alpha t$; $t = \frac{W - W_0}{\alpha}$

Sustituyendo

$$\Delta\theta = W_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\Delta\theta = W_0(W - W_0) + \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{W - W_0}{\alpha}\right)^2$$

$$\Delta\theta = \frac{W_0 W}{\alpha} - \frac{W_0^2}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha}(W^2 - 2WW_0 + W_0^2)$$

$$\Delta\theta = \frac{W_0 W}{\alpha} - \frac{W_0^2}{\alpha} + \frac{W^2}{2\alpha} - \frac{WW_0}{\alpha} + \frac{W_0^2}{2\alpha}$$

$$\Delta\theta = \frac{W^2}{2\alpha} - \frac{W_0^2}{2\alpha}; \quad W^2 - W_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$$

$$W^2 = W_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$$

La siguiente tabla ilustra las similitudes entre el movimiento rectilíneo con $a_x = \text{constante}$ y el movimiento rotacional con $\alpha = \text{constante}$.

MOVIMIENTO RECTILÍNEO $a_x = \text{constante}$	MOVIMIENTO ROTACIONAL $\alpha = \text{constante}$
1. $V = V_0 + at$	1. $w = w_0 + \alpha t$
2. $\Delta x = \left(\frac{V_0 + V}{2}\right)t$	2. $\Delta\theta = \left(\frac{w_0 + w}{2}\right)t$
3. $\Delta x = V_0 t + \frac{1}{2}at^2$	3. $\Delta\theta = w_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
4. $V^2 = V_0^2 + 2a\Delta x$	4. $w^2 = w_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$

9.4 RELACION ENTRE MAGNITUDES CINEMÁTICAS LINEALES Y ANGULARES PARA UNA PARTICULA EN MOVIMIENTO CIRCULAR.

Consideremos una partícula que describe un movimiento circular en un intervalo de tiempo, como se ilustra en la fig. 9.6

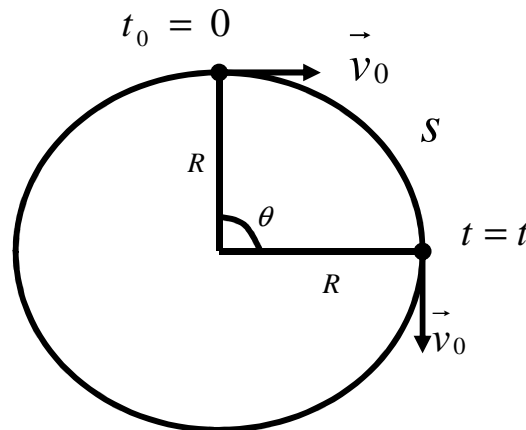


fig.9.6 MOVIMIENTO CIRCULAR DE UNA PARTICULA

De la figura 9.6, el producto del radio por el ángulo da como resultado la longitud de arco (s)

Así. $R\theta = s$

Si la distancia S es recorrida en un tiempo t la velocidad tangencial de la partícula está dada por:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\theta R}{t} = \left(\frac{\theta}{t}\right) R = \omega R$$

$$v = \omega R$$

Si en el tiempo t la velocidad tangencial cambia de v_0 a v , la aceleración tangencial a_T de dicha partícula está dada por:

$$a_T = \frac{v - v_0}{t}$$

$$\text{pero } v = \omega R \text{ y } v_0 = \omega_0 R$$

sustituyendo :

$$a_T = \frac{\omega R - \omega_0 R}{t} = \left(\frac{\omega - \omega_0}{t}\right) R$$

$$a_T = \alpha R$$

CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

La fig. 9.7 ilustra la aceleración radial ($a_c = v^2/R$) y $a_T = \alpha R$. la aceleración centrípeta o radial se origina por un cambio en la dirección de la velocidad.

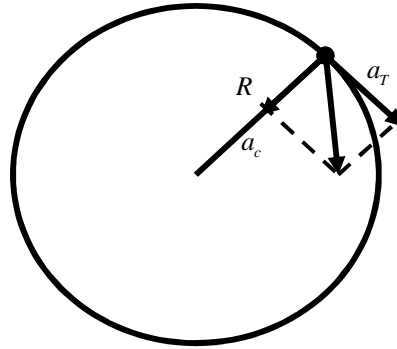


fig.9.7 REPRESENTACION DE VECTOR \vec{a} .

La aceleración tangencial representa un cambio en la velocidad tangencial.

EJEMPLO 1

Las aspas de un ventilador giran inicialmente con una rapidez angular de 48.6 rpm. Posteriormente reduce su velocidad hasta que finalmente se detiene en un tiempo de 32 s después de realizar un total de 8.8 revoluciones. Calcule:

- la velocidad angular promedio.
- La aceleración angular de las aspas.

CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

Solución:

a)

$$w_{prom} = \frac{\Delta\theta}{t} = \frac{8.8 rev}{32s} \cong 0.28 rev/s$$

$$w_{prom} = 0.28 \frac{rev}{s} \times \frac{2\pi rad}{1 rev}$$

$$w_{prom} = 1.76 rad/s$$

b)

$$w_0 = 48.6 \frac{rev}{min} \times \frac{1 min}{60s} = 0.81 rev/s$$

$$\alpha_{prom} = \frac{\Delta w}{t} = \frac{w - w_0}{t} = \frac{0 - 0.81 rev/s}{32s}$$

$$\alpha_{prom} = -0.025 rev/s^2$$

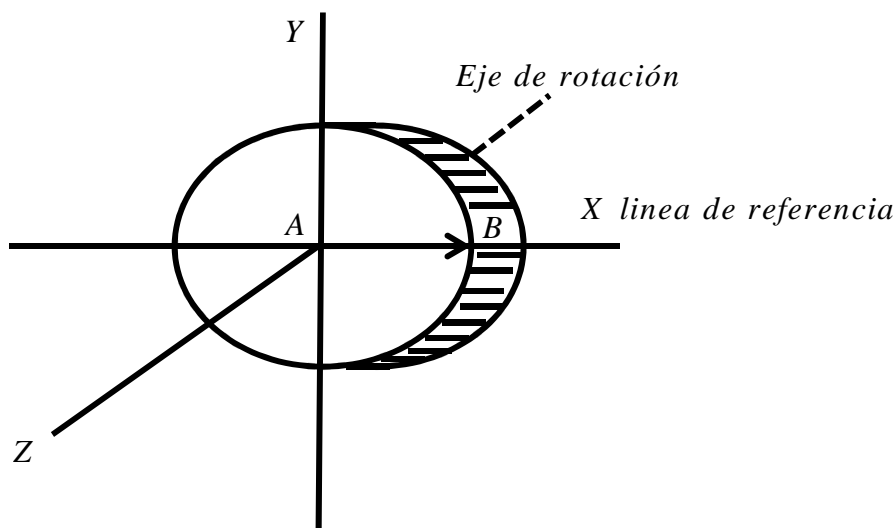
$$\alpha_{prom} = -0.025 \frac{rev}{s^2} \times \frac{2\pi rad}{1 rev}$$

$$\alpha_{prom} = -0.157 rad/s^2$$

EJEMPLO 2

Comenzando del reposo en $t=0$, una muela de molino tiene una aceleración angular constante de $3.2 rad/s^2$. En el tiempo $t=0$, la línea de referencia AB (ver fig.) es horizontal. Determine:

- El desplazamiento angular de la línea AB.
- La rapidez angular de la muela 2.7s más tarde.



CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

Solución.

a)

$$\text{En } t = 0, w_0 = 0, \theta_0 = 0, \alpha = 3.2 \text{ rad/s}^2$$

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\theta = \frac{1}{2} (3.2 \text{ rad/s}^2) (2.7 \text{ s})$$

$$\theta \cong 11.7 \text{ rad} \times \frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}}$$

$$\theta \cong 1.86 \text{ rev.}$$

b)

$$w = w_0 + \alpha t$$

$$w = \alpha t = 3.2 \text{ rad/s}^2 (2.7 \text{ s})$$

$$w = 8.64 \text{ rad/s} \times \frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}}$$

$$w = 1.38 \text{ rev/s}$$

EJEMPLO 3

Supóngase que se suspende la energía que mueve la muela del molino del problema anterior, cuando está girando con una rapidez angular de 8.64 rad/s. una pequeña fuerza de fricción en el eje causa una desaceleración angular constante y la muela del molino se detiene en un tiempo de 192s. Determine:

- La aceleración angular.
- El ángulo total que gira durante la reducción de la velocidad.

CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

Solución.

$$a) \alpha = \frac{w - w_0}{t - t_0} = \frac{0 - 8.64 \text{ rad/s}}{(192 - 0) \text{ s}}$$
$$\alpha = -0.045 \text{ rad/s}^2$$

$$b) \Delta\theta = w_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\Delta\theta = (8.64 \text{ rad/s})(192 \text{ s}) + \frac{1}{2} (-0.045 \text{ rad/s}^2)(192 \text{ s})^2$$

$$\Delta\theta = 830.4 \text{ rad} \times \frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}}$$

$$\Delta\theta = 132 \text{ rev.}$$

EJEMPLO 4

Si el radio de la muela de molino de los ejemplos resueltos 2 y 3 es de 0.24 m. calcule

- a) La rapidez lineal o tangencial de un punto en el borde
- b) La aceleración tangencial de un punto en el borde
- c) La aceleración tangencial de un punto en el borde al cabo de 2.7 s
- d) Repita los literales a), b) y c) con un punto a la mitad respecto del borde, es decir con $r=0.12\text{m}$.

$$a) \text{ A } t=2.7\text{s, se tienen: } w = 8.64 \text{ rad/s, } \alpha = 3.2 \text{ rad/s}^2 \text{ y } r = 0.24\text{m}$$

$$b) v = wr = (8.64 \text{ rad/s})0.24\text{m} = 2.07 \text{ m/s}$$

$$a_T = \alpha r = (3.2 \text{ rad/s}^2)0.24\text{m} = 0.77 \text{ m/s}^2$$

$$c) a_R = w^2 r = (8.64 \text{ rad/s})^2 0.24\text{m} = 17.9 \text{ m/s}^2$$

$$d) v = wr = (8.64)(0.12) = 1.04 \text{ m/s}$$

$$a_T = \alpha r = (3.2)(0.12) = 0.38 \text{ m/s}^2$$

$$a_R = w^2 r = (8.64)^2 (0.12) = 8.96 \text{ m/s}^2$$

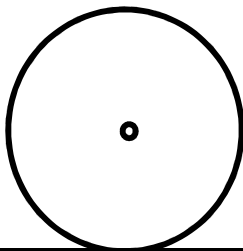
CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

EJEMPLO 5

El aspa de un ventilador eléctrico de 0.850m de diámetro gira sobre el eje fijo con velocidad angular inicial de 3.00 rev/s.

La aceleración angular es de 1.50 rev/s².

- Calcular la velocidad angular después de 1.0s
- ¿Cuántas revoluciones dio el aspa en este tiempo?
- ¿Qué rapidez tangencial tiene un punto en la periferia del aspa en t=1.0s?
- ¿Qué magnitud tiene la aceleración resultante en un punto de la periferia en t=1.0s?



Solución:

Datos: $D = 0.850m$, $w_0 = 3.00 \text{ rev/s}$, $\alpha = 1.50 \text{ rev/s}^2$

$$a) w = w_0 + \alpha t$$

$$w = 3 \text{ rev/s} + 1.50 \text{ rev/s}^2 (1s)$$

$$w = 4.50 \text{ rev/s}$$

$$b) \theta = \theta_0^0 + w_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\theta = (3 \text{ rev/s})(1s) + \frac{1}{2} (1.5 \text{ rev/s}^2)(1s)^2$$

$$\theta = 3.75 \text{ rev}$$

$$c) v = wr = (4.50 \text{ rev/s}) \left(\frac{0.850m}{2} \right) x \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}$$

$$v = 12.0 \text{ m/s}$$

$$d) a = \sqrt{a_T^2 + a_R^2}$$

$$a_T = \alpha r = 1.50 \frac{\text{rev}}{\text{s}^2} x \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} x \frac{0.850m}{2}$$

$$a_T = 4.0 \text{ m/s}^2$$

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \frac{(12.0 \text{ m/s})^2}{0.450m} = 338.8 \text{ m/s}^2$$

$$a = \sqrt{(4.0)^2 + (338.8)^2} = 338.8 \text{ m/s}^2$$

CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

EJEMPLO 6

Un automóvil se mueve a 80 km/h; tiene llantas de 75 cm de diámetro.

- ¿Cuál es la rapidez de las llantas alrededor del eje?
- Si el automóvil llega uniformemente al reposo en treinta vueltas de las llantas, ¿cuál es la aceleración angular de las llantas? Suponga que las llantas no derrapan.
- ¿Qué distancia avanza el automóvil durante el periodo de frenado?

Solución:

$$\text{Datos: } v = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1\text{h}}{3600\text{s}} \times \frac{10^3\text{m}}{1\text{km}} = 22.2 \text{ m/s}$$

$$D = 75\text{cm}, R = \frac{D}{2} = \frac{0.75\text{m}}{2} = 0.375\text{m}$$

$$a) v = wr; \quad w = \frac{v}{r} = \frac{22.2 \text{ m/s}}{0.375\text{m}}$$

$$w = 59.2 \text{ rad/s}$$

$$b) w^2 = w_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$$

$$0 = w_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$$

$$-w_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$$

$$\alpha = -\frac{w_0^2}{2\Delta\theta} = -\frac{(59.2 \text{ rad/s})^2}{2\left(30\text{vueltas} \times \frac{2\pi\text{rad}}{1\text{vuelta}}\right)}$$

$$\alpha = -9.3 \text{ rad/s}^2$$

$$c) \Delta s = r\Delta\theta = 0.375\text{m} \left(30\text{vueltas} \times \frac{2\pi\text{rad}}{1\text{vuelta}}\right)$$

$$\Delta s \cong 70.7\text{m}$$

$$\Delta s \cong 71.0\text{m}$$