الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية باتنة
إمتحان بكالوريا تجريبي التعليم الثانوي
الشعبة هندسة مدنية

ثانويةالإخوة عباس –باتنة
دورة 2023

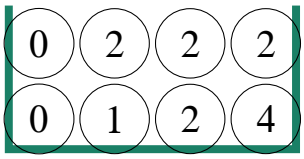
إختبار في مادة : الرياضيات — المدة :04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

## الموضوع الأوّل :

### التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على ثمانية كريات لا نفرق بينها باللمس، وتحمل كل واحدة منها عددا كما هو مبين في الشكل المقابل.
نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الصندوق.




1) نعتبر الحوادث التالية:

$A$: " من بين الكريات المسحوبة لاتوجد أي كرية تحمل الرقم 0 "

$B$: " جداء الأعداد التي تحملها الكريات المسحوبة يساوي 8 "

بين أن: $P(A) = \frac{5}{14}$ و $P(B) = \frac{1}{7}$

2) ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب جداء الأعداد التي تحملها الكريات الثلاث المسحوبة.

ا) عين قيم المتغير العشوائي X. ثم عرف قانون إحتماله

ب) أحسب $E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي $X$.

### التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = e^3$ و $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$

1) برهن بالتراجع أن من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ لدينا: $u_n > 0$

2) نعتبر $(v_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $v_n = \ln(u_n) - 2$
أثبت أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول $v_0$.

3) ا) عبر عن $(v_n)$ بدلالة n

ب) بين أن من أجل كل n من $\mathbb{N}$, $u_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$

4) أثبت أن المتتالية $(u_n)$ متناقصة. بين أن $(u_n)$ متقاربة، ثم أحسب نهايتها.

5) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$:
$S_n = v_0 + 2 + v_1 + 2 + \cdots + v_{n-1} + 2$ و $P_n = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$

ا) أحسب المجموع $S_n$ ثم إستنتج عبارة $P_n$.

**التمرين الثالث: (04 نقاط)**

1) نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة التالية: $(E'):\ 3x-4y=7$

ا) تحقق أن: $(1;\ -1)$ هي حل لـ $(E')$

ب) حدد الثنائية $(x,\ y)$ من $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ حلول $(E')$.

2) من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ نعتبر الأعداد التالية: $A=4n^2+8n-3$ و $B=3n^2+6n-4$. نضع $d=PGCD\,(A,\ B)$

ا) تحقق أن من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $A=4\,(n^2+2n-1)+1$ و $B=3\,(n^2+2n-1)-1$، ثم أثبت أن من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، $(A,\ B)$ هي حلول المعادلة $(E')$

ب) أثبت أن: $d=1$ أو $d=7$

3) ا) أثبت أن من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، $A-B=(n+1)^2$، ثم علل لماذا $d$ يقسم $(n+1)^2$

أنقل ثم أكمل الجدول التالي:

| بواقي القسمة الإقليدية لـ $n$ على 7 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| بواقي القسمة الإقليدية لـ $(n+1)^2$ على 7 | | | | | | | |

4) ا) أثبت أنه إذا كان $d=7$ فإن $n\equiv 6[7]$

ب) أثبت أنه إذا كان $n\equiv 6[7]$ فإن: $A$ و $B$ يقبلان القسمة على 7.

ج) حدد إذا $d$ حسب قيم العدد الطبيعي $n$.

**التمرين الرابع: (08 نقاط)**

I)– نعتبر الدالة f العرفة على $[0,\ \pi]$ بـ: $f(x)=e^{\sin x}$. و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

1) ا) أحسب $f'$ الدالة المشتقة للدالة f، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[0,\ \pi]$.

ب) أثبت أن المستقيم $(\Delta):\ x=\dfrac{\pi}{2}$ محور تناظر لـ $(C_f)$.

ج) بين أن معادلة المماس $(T)$ لـ $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$ هي: $y=x+1$.

2) نعتبر الدالة g المعرفة على $[0,\ 1]$ بـ: $g(x)=e^x\sqrt{1-x^2}-1$ وجدول تغيراتها كما في الشكل المقابل.

| $x$ | $0$ | | $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ | $\searrow$ | $-1$ |

ا) أثبت أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد $\alpha$ في المجال $\left]\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\ 1\right[$.

ب) إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[0,\ 1]$.

3) نعتبر الدالة h المعرفة على $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ كما يلي: $h(x)=e^{\sin x}-(x+1)$

ا) تحقق أن من أجل كل $x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$، $h'(x)=g(\sin x)$.

ب) أثبت أنه يوجد عدد حقيقي $\beta$ في المجال $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ حيث: $\sin\beta=\alpha$.

ج) أدرس إتجاه تغير الدالة $h$ ثم شكل جدوب تغيراتها. إستنتج أن من أجل كل $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) \geq x + 1$. ماذا يمكن القول عن $(C_f)$ و $(\Delta)$.

II)-

1) ا) أثبت أن من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$, $\sin x \leq x$.

ب) إستنتج أن من أجل كل عدد حقيقي $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) \leq e^x$.

ج) أنشىء منحنى الدالة $x \mapsto e^x$، ثم انشىء $(T)$ و $(C_f)$ في المعلم $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

2) ا) أثبت أن: $\int_0^1 f(x)dx \leq e - 1$ و $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \leq e\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

ب) لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ $(C_f)$، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما على الترتيب $x = 0$ و $x = \pi$. أثبت أن: $\frac{\pi^2}{4} + \pi \leq \mathcal{A} \leq e\pi - 2$

Halim Meguelatti
May ,15 2023
MATH TECH 20

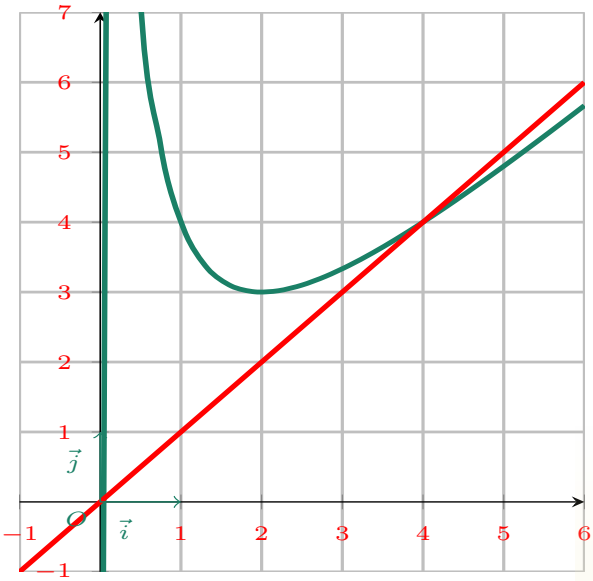
**إنتهى الموضوع الأوّل**

## الموضوع الثّاني :

**التمرين الأول: (04 نقاط)**

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة بحدها الأول $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_{n+1} = u_n - 1 + \dfrac{4}{u_n}$

1) $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x}$. و $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\ \vec{i}, \vec{j}\right)$.




ا) أعد رسم الشكل المقابل على ورق الإجابة ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية $(u_n)$.

ب) أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي $n$: $2 \leq u_n \leq 4$.

ج) أدرس رتابة المتتالية $u_n$

2) ا) أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي $n$:
$4 - u_{n+1} \leq \dfrac{3}{4}(4 - u_n)$.

ب) إستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي $n$:
$4 - u_n \leq 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

ج) إستنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

3) أحسب المجموع $S_n$ بدلالة n حيث من أجل كل عدد طبيعي $n$، $S_n = \dfrac{4}{u_0} + \dfrac{4}{u_1} + \cdots + \dfrac{4}{u_n}$

Halim Meguelatti
May ,15 2023
MATH TECH 20

**التمرين الثاني: (04 نقاط)**

1) نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة: $(E):\ -17x + 11y = 1$.

ا) أثبت أن الثنائية $(-2;\ -3)$ هي حل للمعادلة $(E)$.

ب) حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة $(E)$

2) نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ: $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{N} \\ u_{n+1} = 5u_n + 3 \quad \text{من أجل كل } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

والمتتالية $(v_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n + \dfrac{3}{4}$.

ا) أثبت أن المتتالية $(v_n)$ هندسية.

ب) إستنتج أن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، $4u_n = 5^n(4u_0 + 3) - 3$.

3) ا) عين حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الإقليدية لـ $5^n$ على 11.

ب) تحقق أن: $5^{16} \equiv 1\,[17]$ ثم إستنتج أن: $5^{2022} \equiv 2\,[17]$.

ج) أثبت أن: $u_{2022} \equiv 3u_0 + 7\,[11]$ و $u_{2022} \equiv 2u_0 + 5\,[17]$

4) ا) أثبت أنه $u_{2022} \equiv 0\,[187]$ إذا وفقط إذا كان $\begin{cases} u_0 \equiv 5\,[11] \\ u_0 \equiv 6\,[17] \end{cases}$

ب) حدد أكبر قيمة لـ $u_0$ من أجل $u_{2022} \equiv 0\,[187]$.

**التمرين الثالث: (04 نقاط)**

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\,\vec{u},\,\vec{v})$ النقط التالية: $F$، $G$ و $I$ لواحقهاعلى الترتيب: $z_F = \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$، $z_G = \frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{1}{2}i$ و $z_I = -\frac{1}{2}+i$

1) ا) تحقق أن: $z_F - z_I = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z_G - z_I = \frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$

ب) أثبت أن $F$ و $G$ تنتميان إلى الدائرة $\zeta$ التي مركزها $I$ ونصف قطرها 1.

ج) تحقق أن: $z_F - z_I = i\,(z_G - z_I)$، ثم إستنتج طبيعة المثلث $IFG$.

2) ا) تحقق أن $\left(2+2\sqrt{3}\right)i$ جذر تربيعي لـ: $-16-8\sqrt{3}$.

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2+3z+\frac{25}{4}+2\sqrt{3}=0$

3) نعتبر $K$ و $L$ النقطتان اللتان لواحقهما على الترتيب $z_K = -\frac{3}{2}+i\left(1+\sqrt{3}\right)$ و $z_L = \overline{z_K}$

ا) تحقق أن: $\frac{z_K - z_F}{z_F - z_I} = i\sqrt{3}$. ثم إستنتج أن: $(FK)\perp(FI)$

ب) تحقق أن: $z_G - z_L = \left(2+\sqrt{3}\right)(z_F - z_I)$. ثم إستنتج أن: $(GL)//(FI)$.

**التمرين الرابع: (08 نقاط)**

1) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0,\,+\infty[$ بـ: $g(x) = 1 + x - x\ln x$.

ا) أدرس إتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

ب) أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد $\alpha$ في المجال $]0,\,+\infty[$. تحقق أن: $3,5 < \alpha < 3,6$.

ج) إستنتج إشارة الدالة g.

2) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0,\,+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$. و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\,\vec{i},\,\vec{j}\right)$

ا) أحسب $f'(x)$، ثم تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0,\,+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x^2)}{x\left(1+x^2\right)^2}$

ب) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

ج) تحقق أن: $f(\sqrt{\alpha}) = \frac{1}{2\alpha}$

د) أنشىء $(C_f)$ ( $\alpha \approx 3,6$ )

3) نعتبر $I_n$ متتالية معرفة $N^*$ بـ: $I_n = \int_1^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx$.

ا) أثبت أن المتتالية $I_n$ متزايدة.

ب) أثبت أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال: $]0, 1[$ ، $\ln x \leq f(x) \leq \frac{1}{2}\ln x$

ج) إستنتج أن: $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1+\ln n}{n}\right) \leq I_n \leq 1 - \frac{1+\ln n}{n}$

د) أثبت أن المتتالية $I_n$ متقاربة.

**إنتهى الموضوع الثاني**

# تصحيح مقترح للبكالوريا تجريبية شعبة تقني رياضي 2023

الأستاذ: حليم مقلاتي
ثانوية الإخوة عباس

## الموضوع الأول:

### جواب التمرين الأول:

01 بيا أن: $P(A) = \frac{5}{14}$ و $P(B) = \frac{1}{7}$

$$P(A) = \frac{C_6^3}{C_8^3} = \frac{\frac{6!}{3!\,(6-3)!}}{\frac{8!}{3!\,(8-3)!}} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$$

$$P(B) = \frac{C_4^3 + C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1}{C_8^3} = \frac{4+4}{56} = \frac{1}{7}$$

02 (ا) تعيين قيم المتغير العشوائي $X$:

$X(\Omega) = \{0;\ 4,\ 8;\ 16\}$

قانون الإحتمال للمتغير العشوائي $X$:

$$P(X=0) = \frac{C_2^1 \times C_2^6 + C_2^2 \times C_6^1}{56} = \frac{2 \times 15 + 6}{56} = \frac{36}{56}$$

$$P(X=4) = \frac{C_4^2 \times C_1^1}{56} = \frac{6}{56}$$

$$P(X=8) = \frac{C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1 + C_4^3}{56} = \frac{8}{56}$$

$$P(X=16) = \frac{C_4^2 \times C_1^1}{56} = \frac{6}{56}$$

| $x_i$ | 0 | 4 | 8 | 16 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{36}{56}$ | $\frac{6}{56}$ | $\frac{8}{56}$ | $\frac{6}{56}$ |

(ب) حساب الأمل الرياضياتي $E(x)$:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{i=4} P_i x_i = 0 \times \frac{36}{56} + 4 \times \frac{6}{56} + 8 \times \frac{8}{56} + 16 \times \frac{6}{56}$$

$$E(x) = \frac{184}{56} = \frac{23}{7}$$

### جواب التمرين الثاني:

لدينا $(u_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = e^3$ و $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$

01 برهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي $n$ $u_n > 0$:

نسمي $P(n)$ الخاصية $u_n >$

نتحقق من صحة الخاصية من أجل $n = 0$ أي $P(0)$

$u_0 = e^3 > 0$. إذن محققة

نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي $n$ كيفي

ونبرهن صحةالخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$

لدينا: $u_n > 0$ معناه $\sqrt{u_n} > 0$ معناه $e\sqrt{u_n} > 0$

معناه $u_{n+1} > 0$ ومنه الخاصية محققة من أجل كل عدد طبيعي $n$

02 $(v_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \ln(u_n) - 2$.

إثبات أن $(v_n)$ متتالية هندسية:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$،

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1}) - 2 \\ &= \ln(e\sqrt{u_n}) - 2 = \ln e + \ln(u_n)^{\frac{1}{2}} - 2 \\ &= 1 - 2 + \frac{1}{2}\ln(u_n) \\ &= \frac{1}{2}(\ln(u_n) - 2) = \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

ومنه $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول

$$v_0 = \ln u_0 - 2 = \ln e^3 - 2 = 1$$

03 (ا) كتابة $v_n$ بدلالة $n$:

$$v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(ب) بيان أن من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$:

لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، $v_n = \ln u_n - 2$

معناه $\ln u_n = v_n + 2$ معناه

$$u_n = e^{v_n + 2} = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$$

04 إثبات أن المتتالية $(u_n)$ متناقصة:

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{e^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2}}{e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}} \\ &= e^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2} \\ &= e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2} - 1\right)} \\ &= e^{-\frac{1}{2^{n+1}}} \end{aligned}$$

ونعلم أنه إذا كان $x < 0$ فإن $e^x < 1$ ومنه فإن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $e^{-\frac{1}{2^{n+1}}} < 1$ معناه: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ إذن المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما.

وبا أن المتتالية $(u_n)$ متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

حساب النهاية:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2} = e^2$$

لأن: $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

05 لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$:

$$S_n = v_0 + 2 + v_1 + 2 + \cdots + v_{n-1} + 2 \text{ و } P_n = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$$

حساب $S_n$ و $P_n$:

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + 2 + v_1 + 2 + \cdots + v_{n-1} + 2 \\ &= 2 + 2 + \cdots + 2 + v_0 + v_1 + v_{n-1} \\ &= 2(n-1-0+1) + v_0 \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1+1}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 2n + 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ &= 2\left(n+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ P_n &= u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1} \\ &= e^{v_0+2} \times e^{v_1+2} \times \cdots \times e^{v_{n-1}+2} \\ &= e^{S_n} = e^{2\left(n+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)} \end{aligned}$$

## جواب التمرين الثالث:

01 لدينا في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة التالية: $(E') : 3x - 4y = 7$

(ا) التحقق من أن: $(1;\ -1)$ هي حل لـ $(E')$:
لدينا: $3(1) - 4(-1) = 3 + 4 + 7$ ومنه الثنائية $(1;\ -1)$ هي حل للمعادلة $(E')$.

(ب) تحديد الثنائية $(x,\ y)$ من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ حلول $(E')$:
لدينا بما أن $(1;\ -1)$ هي حل للمعادلة $(E')$ فإن: $3(x-1) - 4(y+1) = 0$ معناه:
$3(x-1) = 4(y+1)$ وبما أن: $4|3(x-1)$
و 4 و 3 أوليان فيما بينهما ومنه حسب غوص فإن: $4|(x-1)$ إذن يوجدعدد صحيح $k$ حيث:
$x - 1 = 4k$ معناه: $x = 4k + 1$
ومن جهة أخرى لدينا: وبما أن: $3|4(y+1)$ و 4 3 أوليان فيما بينهما ومنه حسب غوص فإن: $3|(y+1)$ إذن يوجدعدد صحيح $k$ حيث:
$y + 1 = 3k$ معناه: $y = 3k - 1$
ومنه حلول المعادلة $(E')$ هي:
$(x,\ y) = \{x = 4k + 1 y = 3k - 1\ k \in \mathbb{Z}\}$

02 لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ مايلي: $A = 4n^2 + 8n - 3$ و $B = 3n^2 + 6n - 4$. و $d = PGCD\,(A,\ B)$

(ا) التحقق من أن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $A = 4\left(n^2 + 2n - 1\right) + 1$ و $B = 3\left(n^2 + 2n - 1\right) - 1$:

$$\begin{aligned} A &= 4\left(n^2 + 2n - 1\right) + 1 = 4n^2 + 8n - 4 + 1 \\ &= 4n^2 + 8n - 3 \\ B &= 3\left(n^2 + 2n - 1\right) - 1 = 3n^2 + 6n - 3 - 1 \\ &= 3n^2 + 6n - 4 \end{aligned}$$

التحقق من أن $A$ و $B$ هما حلول للمعادلة $(E')$:
لدينا بما أن $3A - 4B = 7$ فإن $A$ و $B$ حلول للمعادلة $(E')$

(ب) لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$ $d|A$ معناه $d|3A$ و $d|B$ معناه $d|-4B$ ومنه فإن $d|3A - 4B$ معناه $d|7$ وبما أن 7 عدد أولي فإن: $d = 1$ أو $d = 7$

03 (ا) إثبات أن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، $A - B = (n+1)^2$:

$$\begin{aligned} A - B &= 4n^2 + 8n - 3 - 3n^2 - 6n + 4 \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

بما أن $d|A$ و $d|B$ فإن: $d|A - B$ معناه $d|(n+1)^2$

إكمال الجدول:

$(n+1)^2 \equiv 1[7]$ معناه $n \equiv 0[7]$
$(n+1)^2 \equiv 4[7]$ معناه $n \equiv 1[7]$
$(n+1)^2 \equiv 2[7]$ معناه $n \equiv 2[7]$
$(n+1)^2 \equiv 2[7]$ معناه $n \equiv 3[7]$
$(n+1)^2 \equiv 4[7]$ معناه $n \equiv 4[7]$
$(n+1)^2 \equiv 1[7]$ معناه $n \equiv 5[7]$
$(n+1)^2 \equiv 0[7]$ معناه $n \equiv 6[7]$

| بواقي القسمة الإقليدية لـ $n$ على 7 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| بواقي القسمة الإقليدية لـ $(n+1)^2$ على 7 | 1 | 4 | 2 | 2 | 4 | 1 | 0 |

04 (ا) إثبات أنه إذا كان $d = 7$ فإن $n \equiv 6[7]$:
لدينا بما أن $d|(n+1)^2$ معناه $7|(n+1)^2$ معناه $(n+1)^2 \equiv 0[7]$ ومن خلال الجدول نجد أن: $n \equiv 6[7]$

(ب) إثبات أنه إذا كان $n \equiv 6[7]$ فإن: $A$ و $B$ يقبلان القسمة على 7:
لدينا:
$n \equiv 6[7]$ معناه
$(n+1)^2 \equiv 0[7]$ معناه $A - B \equiv 0[7]$
معناه يوجد $p \in \mathbb{Z}$ حيث: $A - B = 7p$
ومن جهة أخرى لدينا $3A - 4B = 7$ معناه $3(A - B) - B = 7$ معناه $3 \times 7p - B = 7$
معناه $B = 7(3p - 7) = 7q$ حيث $q \in \mathbb{Z}$
ومنه فإن 7 يقسم $B$.
وبما أن: $A - B = 7p$ فإن: $A = 7(p - q)$
معناه $A$ يقبل القسمة على 7.

(ج) تحديد $d$ حسب قيم العدد الطبيعي $n$:

$$d = \begin{cases} 7 & \text{إذا كان } n \equiv 6[7] \\ 1 & \text{إذا كان } n \not\equiv 6[7] \end{cases}$$

## جواب التمرين الثالث:

ا)- f دالة معرفة على $[0,\ \pi]$ كمايلي: $f(x) = e^{\sin x}$

01 ا) حساب $f'$ الدالة المشتقة للدالة $f$:
$f$ دالة قابلة للإشتقاق على مجموعة تعريفها أنها عبارة عن مركب دالتين قابلتين للإشتقاق على مجموعة تعريفها ومنه من أجل كل $x \in [0,\ \pi]$ لدينا: $f'(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$.

إشارة المشتقة من إشارة $\cos(x)$ لأن $e^{\sin(x)} > 0$ ومنه:

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $e$ | $\searrow$ | $1$ |

ب) إثبات أن المستقيم $x = \frac{\pi}{2}$ : $(\Delta)$ محور تناظر لـ $(C_f)$:

يكفي إثبات مايلي: $f(2\alpha - x) = f(x)$ حيث: $(2\alpha - x) \in D_f$

لدينا من أجل : $x \in [0, \pi]$ فإن $-x \in [-\pi, 0]$

معناه $2 \times \frac{\pi}{2} - x \in [0, \pi]$ ومن جهة أخرى لدينا:

$$\begin{aligned} f(2 \times \tfrac{\pi}{2} - x) &= f(\pi - x) = e^{sin(\pi - x)} \\ &= e^{\sin x} = f(x) \end{aligned}$$

معناه أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $x = \frac{\pi}{2}$ محور تناظر لـ $(C_f)$

ج) بيان أن معادلة المماس $(T)$ لـ $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$ هي: $y = x + 1$:

$$\begin{aligned} (T) : y &= f'(x_0)(x - 0) + f(x_0) \\ &= f'(0)(x - 0) + f(0) = \cos(0)e^{\sin(0)} \times x + e^{\sin(0)} \\ &= x + 1 \end{aligned}$$

02 $g$ دالة معرفة على $[0, 1]$ كمايلي: $g(x) = e^x\sqrt{1 - x^2} - 1$:

ا) إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد $\alpha$ في المجال $\left]\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, 1\right[$:

$g$ دالة مستمرة ومتناقصة تماما عى المجال $\left]\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, 1\right[$ و $g\left(\left]\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, 1\right[\right) = \left]-1, g\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)\right[$ وبما أن :

$0 \in \left]-1, g\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)\right[$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة فالمعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد $\alpha$.

ب) إستنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $[0, 1]$:

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

03 $h$ دالة معرفة على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ كما يلي: $h(x) = e^{\sin x} - (x + 1)$

ا) التحقق من أجل كل $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$، $h'(x) = g(\sin x)$:

$h$ دالة قابلة للإشتقاق على مجموعة تعريفها لأنها عبارة عن مجموع دالتين قابلتين للإشتقاق على مجموعة تعريفهما ومنه من أجل كل $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

لدينا: $h'(x) = \cos(x)e^{\sin(x)} - 1$ ومن جهة أخرى لدينا:

$$\begin{aligned} g(\sin x) &= e^{\sin x}\sqrt{1 - \sin^2(x)} - 1 = \\ & e^{\sin x}\sqrt{\cos^2 x} - 1 = \cos x e^{\sin x} \end{aligned}$$

ومنه $h'(x) = \cos x e^{\sin x}$

ب) إثبات أنه يوجد عدد حقيقي $\beta$ في المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ حيث: $\sin\beta = \alpha$:

$x \mapsto \sin x$ دالة مستمرة ورتيبة تماما على المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ وبما أن: $\alpha \in [\sin(0), \sin(\frac{\pi}{2})]$ أي $\alpha \in [0, 1]$ ومنه فحسب مبرهن القيم المتوسطة فالمعادلة $\sin\beta = \alpha$ تقبل حل وحيد $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ حيث: $\sin x = \alpha$

ج) دراسة إتجاه تغير الدالة h ثم تشكيل جدول تغيراتها :

إشارة المشتقة من إشارة $g(\sin x)$ ولدينا مما سبق $g(\sin x) > 0$ إذا كان $\sin x \in [0, \alpha]$ معناه $x \in [0, \beta]$ إذن الدالة $g$ متزايدة تماما على هذا المجال.

و $g(\sin x) < 0$ إذا كان $\sin x \in [\alpha, 1]$ معناه $x \in \left[\beta, \frac{\pi}{2}\right]$ ومنه الدالة $g$ متناقصة تماما على هذا المجال.

| $x$ | $0$ | | $\beta$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $h(\beta)$ | $\searrow$ | $h(\frac{\pi}{2})$ |

إستنتاج أن من أجل كل $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

لدينا $h(0) = 0$ و $h(\beta) < h\left(\frac{\pi}{2}\right)$ وبما أن $h\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ فإن $h(\beta) > 0$ ومنه فإن $h(x) > 0$ من أجل كل $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

ومنه $e^{\sin x} - (x+1) > 0$ معناه $e^{\sin x} > (x+1)$

إذن $f(x) > x + 1$ ومنه نستنتج أن $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ من أجل كل $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

II)- 01 ا) إثبات أن من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$، $\sin x \leq x$:

لدينا $\cos x \leq 1$ معناه $\int_0^x \cos t dt \leq \int_0^x 1 dt$

معناه $[\sin t]_0^x dt \leq [t]_0^x dt$ معناه $\sin x \leq x$

ب) إستنتج أن من أجل كل عدد حقيقي $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$،

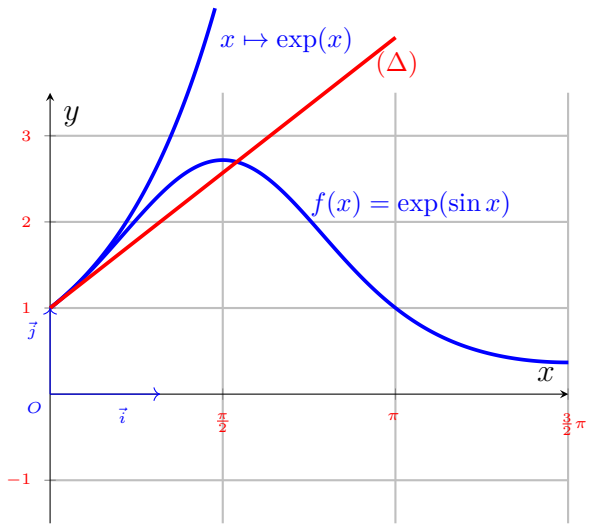
$f(x) \leq e^x$:

لدينا من أجل كل $x \in \geq 0$، $\sin x \leq x$ معناه $e^{\sin x} \leq e^x$

( لأن الدالة الأسية متزايدة تماما على مجموعة تعريفها. )

معناه من أجل كل $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ فإن: $f(x) \leq e^x$.

ج) الإنشاء:




02 ا) إثبات أن:

$$\int_0^1 \mathrm{f(x)dx} \leq e - 1$$

و

$$\int_1^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{f(x)dx} \leq e\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

لدينا من أجل كل $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$، $f(x) \leq e^x$ معناه

$$\int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 e^x dx$$

معناه

$$\int_0^1 f(x)dx \leq [e^x]_0^1$$

معناه $\int_0^1 f(x)dx \leq e - 1$

ومن جهة أخرى لدينا: $\sin x \leq 1$ معناه $f(x) \leq e$ معناه

$$\begin{aligned} \int_1^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{f(x)dx} &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e \\ &= e[x]_1^{\frac{\pi}{2}} \\ &= e\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \end{aligned}$$

ب) إثبات أن:

$$\frac{\pi^2}{4} + \pi \leq \mathcal{A} \leq e\pi - 2$$

لدينا مما سبق: $x + 1 \leq f(x) \leq e^x$ من اجل كل عدد حقيقي $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ و $x = \frac{\pi}{2}$ محور تناظر لـ $(C_f)$ معناه:

$\mathcal{A} = \int_0^{\pi} f(x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ ومنه:

$$\int_0^{\pi} x + 1dx \leq \int_0^{\pi} f(x)dx \leq \int_0^{\pi} e^x dx$$

معناه

$$\left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x dx$$

معناه

$$\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \leq e - 1 + e\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

معناه

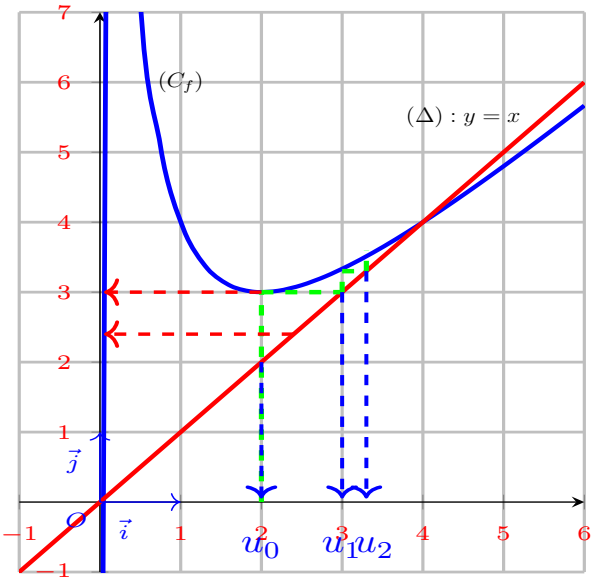
$$\frac{\pi}{4} + \pi \leq \mathcal{A} \leq e(\pi - 1)$$

إنتهى الموضوع الأول

Halim Meguellati

الموضوع الثاني: جواب التمرين الأول:

01 ا) التمثيل على محور الفواصل الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية:




ب) أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي $n$: $2 \leq u_n \leq 4$:

نبرهن بإستعمال التراجع مايلي: من أجل كل عدد طبيعي $n$، $2 \leq u_n \leq 4$

نسمي $P(n)$ الخاصية $2 \leq u_n \leq 4$.

نتحقق من صحة الخاصية $P(0)$:

لدينا $u_0 = 2$ و $2 \leq u_0 \leq 4$ إذن محققة.

نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل عدد طبيعي $n$ كيفي.

نتحقق من صحة الخاصية $P(n+1)$ أي $2 \leq u_{n+1} \leq 4$

لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}$:

$$2 \leq u_n \leq 4$$

والدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $[2, +\infty[$ معناه:

$$f(2) \leq f(u_n) \leq f(4)$$

معناه:

$$3 \leq u_{n+1} \leq 4$$

و بما أن:

$$2 \leq 3 \leq u_{n+1} \leq 4$$

فإن:

$$2 \leq u_{n+1} \leq 4$$

ومنه الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n$.

ج) دراسة رتابة المتتالية $u_n$:

يكفي دراسة إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ من أجل كل عدد طبيعي $n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n - 1 + \tfrac{4}{u_n} - u_n \\ &= -1 + \tfrac{4}{u_n} = \frac{4 - u_n}{u_n} \geq 0 \end{aligned}$$

بما أن: $u_{n+1} - u_n \geq 0$ فإن المتتالية $u_n$ متزايدة تماما.

02 ا) أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي $n$، $4 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(4 - u_n)$:

لدينامن أجل كل عدد طبيعي $n$:

$$\begin{aligned} 4 - u_{n+1} &= 4 - u_n + 1 - \tfrac{4}{u_n} \\ &= \frac{5u_n - u_n^2 - 4}{u_n} \\ &= \frac{(u_n - 1)(4 - u_n)}{u_n} \\ &= \frac{u_n - 1}{u_n} \times (4 - u_n) \end{aligned}$$

يكفي إثبات أن: $\frac{u_n - 1}{u_n} \leq \frac{3}{4}$

لدينا:

$$-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{u_n} \leq -\frac{1}{4}$$

معناه:

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{u_n} \leq \frac{3}{4}$$

معناه

$$\frac{u_n - 1}{u_n} \leq \frac{3}{4}$$

ومنه:

$$4 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(4 - u_n)$$

ب) إستنتاج أن من أجل كل عدد طبيعي $n$: $4 - u_n \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$:

لدينا مايلي:

$$\begin{aligned} \cancel{4 - u_1} &\leq \tfrac{3}{4}(4 - u_0) \\ \cancel{4 - u_2} &\leq \tfrac{3}{4}\cancel{(4 - u_1)} \\ \vdots \quad &\leq \vdots \\ 4 - u_n &\leq \tfrac{3}{4}\cancel{(4 - u_{n-1})} \end{aligned}$$

ومنه بالضرب طرف لطرف نجد:

$$4 - u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1+1}(4 - u_0)$$

معناه:

$$4 - u_n \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

ج) إستنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$:

$$0 < 4 - u_n \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

معناه:

$$\lim_{n\to+\infty} 4 - u_n \leq \lim_{n\to+\infty} 2\cancel{\left(\frac{3}{4}\right)^n}^{\,0}$$

معناه:

$$\lim_{n\to+\infty} 4 - u_n = 0$$

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$$

03 حساب المجموع $S_n$ حيث من أجل كل عدد طبيعي $n$:

$$S_n = \frac{4}{u_0} + \frac{4}{u_1} + \cdots + \frac{4}{u_n}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_{n+1} = u_n - 1 + \dfrac{4}{u_n}$

معناه:

$$\frac{4}{u_n} = u_{n+1} - u_n + 1$$

ومنه:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{4}{u_0} + \frac{4}{u_1} + \cdots + \frac{4}{u_n} \\ &= \cancel{u_1} - u_0 + 1 + u_2 - \cancel{u_1} + 1 + \cdots + u_{n+1} - \cancel{u_n} + 1 \\ &= -u_0 + u_{n+1} + n + 1 \\ &= u_{n+1} + n - 1 \end{aligned}$$

## جواب التمرين الثاني:

01 لدينا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة: $(E):\ -17x + 11y = 1$

ا) إثبات أن الثنائية $(-2;\ -3)$ هي حل للمعادلة $(E)$:

بما أن:

$$-17(-3) + 11(-2) = 34 - 33 = 1$$

إذن الثنائية $(-2;\ -3)$ حل للمعادلة $(E)$.

ب) الحل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة $(E)$:

مما سبق لدينا:

$$-17\,(x+2) + 11\,(y+3) = 0$$

معناه:

$$17\,(x+2) = 11\,(y+3)$$

معناه: 17 يقسم $11\,(y+3)$ ولدينا: 17 و 11 أوليان فيما بينهما ومنه حسب غوص فإن 17 يقسم $y+3$ معناه يوجد $k \in \mathbb{Z}$ حيث: $y + 3 = 17k$ معناه:

$$y = 17k - 3$$

ومن جهة أخرى لدينا: 11 يقسم $17\,(x+2)$ و $PGCD(17,\ 11) = 1$ معناه: حسب غوص فإن 11 يقسم $x+2$ معناه يوجد $k \in \mathbb{Z}$ حيث: $x+2 = 11k$ معناه: $x = 11K - 2$ ومنه حلول المعادلة $(E)$ هي:

$$S = \{(1K-2,\ 7k-3)\ k \in \mathbb{Z}\}$$

02 $(u_n)$ متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ:

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{N} \\ u_{n+1} = 5u_n + 3 \quad \text{من أجل كل } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

والمتتالية $(v_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n + \dfrac{3}{4}$.

ا) إثبات أن المتتالية $(v_n)$ هندسية:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + \frac{3}{4} \\ &= 5u_n + 3 + \frac{3}{4} = 5u_n + \tfrac{15}{4} \\ &= 5(u_n + \tfrac{3}{4}) \\ &= 5v_n \end{aligned}$$

ومنه $(u_n)$ متتالية هندسية أساسها $q = 5$ وحدها الأول $u_0 + \frac{3}{4}$ ومنه:

$$v_n = \left(u_0 + \frac{3}{4}\right) \times 5^n$$

ب) إستنتاج أن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$،

$4u_n = 5^n\,(4u_0 + 3) - 3$:

مما سبق ل لدينا: $4u_n = 4v_n - 3$ حيث:

$v_n = \left(u_0 + \frac{3}{4}\right) \times 5^n$ ومنه:

$$4u_n = 5^n\,(4u_0 + 3) - 3$$

03 ا) تعيين حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الإقليدية لـ $5^n$ على 11:

$$\begin{aligned} 5^0 &\equiv 1[11] \\ 5^1 &\equiv 5[11] \\ 5^2 &\equiv 3[11] \\ 5^3 &\equiv 4[11] \\ 5^4 &\equiv 9[11] \\ 5^5 &\equiv 1[11] \end{aligned}$$

ومنه بواقي القسمة الإقليدية لـ: $5^n$ على 11 تشكل متتالية دورية ودورها 5 ومنه:

| $n =$ | $5k$ | $5k+1$ | $5k+2$ | $5k+3$ | $5k+4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $5^n \equiv$ | 1 | 5 | 3 | 4 | 9 |

ب) التحقق من أن: $5^{16} \equiv 1[17]$

لدينا: $5^{16} = (5^2)^8$ وبما أن: $5^2 \equiv 8[17]$ معناه: $(5^2)^8 \equiv 8^8[17]$ و $(8^2)^4 \equiv (13)^4[17]$ إذن $(13^2)^2 \equiv 16^2[17]$ إذن و $16^2 \equiv 1[17]$ ومنه:

$$5^{16} \equiv 1[17]$$

إستنتاج أن $5^{2022} \equiv 2\,[17]$: لدينا:

$$5^{2022} = 5^6 \times 5^{2016} = 5^6 \times (5^{16})^{126}$$

وبما أن: $5^6 \equiv 2[17]$ و $(5^{16})^{126} \equiv 1[17]$ فإن:

$$5^{2022} \equiv 2[17]$$

ج) إثبات أن: $u_{2022} \equiv 3u_0 + 7\,[11]$ و $u_{2022} \equiv 2u_0 + 5\,[17]$

مما سبق لدينا:

$$4u_n = 5^n\,(4u_0 + 3) - 3$$

معناه:

$$4u_{2022} = 5^{2022}\,(4u_0 + 3) - 3$$

وبما أن:

$$5^{2022} \equiv 2[17]$$

فإن:

$$4u_{2022} \equiv 2\,(4u_0 + 3) - 3[17]$$

معناه:

$$4u_{2022} \equiv 8u_0 + 6 - 3[17]$$

معناه:

$$16u_{2022} \equiv 32u_0 + 12[17]$$

معناه:

$$-u_{2022} \equiv -2u_0 - 5[17]$$

معناه:

$$u_{2022} \equiv 2u_0 + 5[17]$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$4u_{2022} \equiv 5^{2022}\,(4u_0 + 3) - 3[11]$$

وبما أن:

$$5^{2022} = 5^{404\times5+2} \equiv 3[11]$$

ومنه:

$$4u_{2022} \equiv 3\,(4u_0 + 3) - 3[11]$$

معناه:

$$4u_{2022} \equiv 12u_0 + 9 - 3[11]$$

معناه:

$$4u_{2022} \equiv 12u_0 + 6[11]$$

معناه:

$$12u_{2022} \equiv 3u_0 + 18[11]$$

معناه:

$$u_{2022} \equiv 3u_0 + 7[11]$$

**04** إثبات أنه $u_{2022} \equiv 0\,[187]$ إذا وفقط إذا كان

$$\begin{cases} u_0 \equiv 5\,[11] \\ u_0 \equiv 6\,[17] \end{cases}$$

لدينا: $u_{2022} \equiv 0\,[187]$ معناه: $187|u_{2022}$ و بما أن: $187 = 11 \times 17$ فإن:

$$\begin{cases} u_{2022} \equiv 0[11] \\ u_{2022} \equiv 0[17] \end{cases}$$

معناه:

$$\begin{cases} 3u_0 + 7 \equiv 0[11] \\ 2u_0 + 5 \equiv 0[17] \end{cases}$$

معناه:

$$\begin{cases} 3u_0 \equiv -7[11] \\ 2u_0 \equiv -5[17] \end{cases}$$

معناه:

$$\begin{cases} 12u_0 \equiv 16[11] \\ 2u_0 \equiv 12[17] \end{cases}$$

معناه:

$$\begin{cases} 12u_0 \equiv 16[11] \\ 2(u_0 - 6) \equiv 0[17] \end{cases}$$

معناه:

$$\begin{cases} u_0 \equiv 5[11] \\ u_0 \equiv 6[17] \end{cases}$$

**05** تحديد أكبر قيمة لـ $u_0$ من اجل $u_{2022} \equiv 0[187]$:

بما أن: $u_{2022} \equiv 0[187]$ معناه:

$$(*) \cdots \begin{cases} u_0 \equiv 5[11] \\ u_0 \equiv 6[17] \end{cases}$$

معناه:

$$\begin{cases} u_0 = 11y + 5; & y \in \mathbb{N} \\ u_0 = 17x + 6; & x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

معناه: $11y + 5 = 17x + 6$ معناه: $-17x + 11y = 1$

وحلول هذه المعادلة هي: $x = 11k - 2$ و $y = 17k - 3$

حيث: $k \in \mathbb{N}^*$ لأن: $u_0 \in \mathbb{N}$ ومنه بالتعويض نجد:

$$u_0 = 17(11k - 2) = -28 + 187k$$

ومنه حلول الجملة $(*)$ هي: $u_0 = -28 + 187k$

حيث: $k \in \mathbb{N}^*$ ومنه أصغر قيمة تأخذها $u_0$ من أجل $u_{2022} \equiv 0[187]$ هي:

نأخذ $k = 1$ ومنه: $u_0 = -28 + 187$ ومنه: $u_0 = 159$

## جواب التمرين الثالث:

01 ا) التحقق من أن: $z_F - z_I = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z_G - z_I = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} z_F - z_I &= \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i + \frac{1}{2} - i \\ &= i + i\frac{\sqrt{3}}{2} - i + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_G - z_I &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} - i \\ &= \frac{\sqrt{3}-1+1}{2}\frac{1-2}{2}i \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \end{aligned}$$

ب) إثبات أن $F$ و $G$ تنتميان إلى الدائرة $\zeta$ التي مركزها $I$ ونصف قطرها 1:

بما أن: $z_F - z_I = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و

$$\begin{aligned} |z_F - z_I| &= \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{3}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ومنه فإن: $F \in \zeta$

ولدينا:

$z_G - z_I = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$ حيث:

$$\begin{aligned} z_G - z_I &= \sqrt{\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{4}} = 1 \end{aligned}$$

ومنه فإن: $G \in \zeta$

ج) التحقق من أن: $z_F - z_I = i(z_G - z_I)$، ثم إستنتاج طبيعة المثلث $IFG$:

$$\begin{aligned} z_F - z_I &= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) \\ &= i(z_G - z_I) \end{aligned}$$

وبما أن: $\arg\left(\frac{z_F - z_I}{z_G - z_I}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

و $|z_F - z_I| = |z_G - z_I|$ فإن المثلث قائم ومتساوي الساقين.

02 ا) التحقق من أن $(2+2\sqrt{3})\,i$ جذر تربيعي لـ $-16 - 8\sqrt{3}$: بما أن:

$$\begin{aligned} \left((2+2\sqrt{3})\,i\right)^2 &= i^2\,(2+2\sqrt{3})^2 \\ &= -1\,(4+12+8\sqrt{3}) \\ &= -1\,(16+8\sqrt{3}) = -16-8\sqrt{3} \end{aligned}$$

ب) الحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 + 3z + \frac{25}{4} + 2\sqrt{3} = 0$:

$$\begin{aligned} \Delta &= 3^2 - \times 25 - 8\sqrt{3} \\ &= -16 - 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-3+\sqrt{-16-8\sqrt{3}}}{2} = \frac{-3+i(2+2\sqrt{3})}{2} \\ &= -\frac{3}{2} + i\left(1+\sqrt{3}\right) \\ z_2 &= \frac{-3-\sqrt{-16-8\sqrt{3}}}{2} = \frac{-3-i(2+2\sqrt{3})}{2} \\ &= -\frac{3}{2} - i\left(1+\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

03 ا) التحقق من أن: $\frac{z_K - z_F}{z_F - z_I} = i\sqrt{3}$. ثم إستنتاج أن $(FK)\perp(FI)$:

$$\begin{aligned} \frac{z_K - z_F}{z_F - z_I} &= \frac{-\frac{3}{2} + i\left(1+\sqrt{3}\right) - \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i}{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i + \frac{1}{2} - i} \\ &= \frac{-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{-3 = i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} \\ &= \frac{i\sqrt{3}\left(1+i\sqrt{3}\right)}{1+i\sqrt{3}} \\ &= i\sqrt{3} \end{aligned}$$

بما أن:

$$\arg\left(\frac{z_K - z_F}{z_F - z_I}\right) = \arg\left(i\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

فإن: $(FK)\perp(FI)$

ب) التحقق من أن: $z_G - z_L = \left(2+\sqrt{3}\right)(z_F - z_I)$. ثم إستنتاج أن $(GL)//(FI)$:

$$\begin{aligned} z_G - z_L &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{3}{2} + i\left(1+\sqrt{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}+2}{2} + \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2}\right)i \\ &= \frac{\sqrt{3}+2}{2} + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)i \\ &= \left(2+\sqrt{3}\right)\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= \left(2+\sqrt{3}\right)(z_F - z_I) \end{aligned}$$

ومنه: $\frac{z_G - z_L}{z_F - z_I} = 2+\sqrt{3} \in \mathbb{R}$

ومنه بما إن الشعاعان $\overrightarrow{LG}$ و $\overrightarrow{IF}$ مرتبطان خطيا، ومنه فإن $(GL)//(FI)$.

## جواب التمرين الرابع:

**01** g دالة معرفة على $]0,\ +\infty[$ بـ: $g(x) = 1 + x - x\ln x$

ا) دراسة إتجاه التغير الدالة $g$ وتشكيل جدول تغيراتها:
$g$ دالة قابلة للإشتقاق على مجموعة تعريفها ودالتها المشتقة هي: $g'(x) = 1 - \ln x - x \times \frac{1}{x} = -\ln x$
ومنه إشارة المشتقة هي كما يلي:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |

ومنه بما أن $g'(x) > 0$ من أجل كل عدد حقيقي $x \in ]0,\ 1]$ فإن الدالة $g$ متزايدة تماما على هذا المجال.
ولدينا $g'(x) < 0$ من أجل كل عدد حقيقي $x \in [1,\ +\infty[$ ومنه فإن الدالة $g$ متناقصة تماما عل هذا المجال.
وجدول تغيراتها كما يلي:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ $1$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-\infty$ |

ب) إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد $\alpha$ في المجال $]0,\ +\infty[$:
$g$ دالة مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0,\ 1]$ و $g(]0,\ 1]) = [1,\ 2]$ معناه: $g(x) > 0$ على المجال $[0,\ 1]$
ومن جهة أخرى لدينا $g$ دالة مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[1,\ \infty[$ و $g(1) = 2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ أي: $0 \in ]-\infty,\ 2]$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد $\alpha$ على المجال $]0,\ +\infty[$
التحقق من أن: $3,5 < \alpha < 3,6$:
بما أن: $\begin{cases} g(3,5) \approx 0,11 \\ g(3,6) \approx -0,01 \end{cases}$
و $g(3,5) \times g(3,6) < 0$
فإن: $3,5 < \alpha < 3,6$

ج) إستنتاج إشارة الدالة g:

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**02** $f$ دالة معرفة على $]0,\ +\infty[$ كمايلي: $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 + x^2}$:

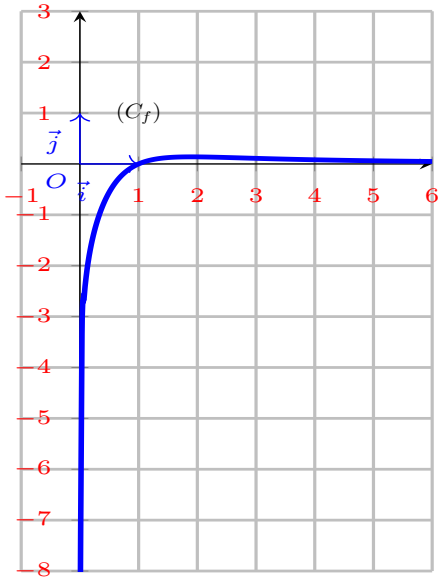
ا) حساب $f'(x)$ والتحقق من أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0,\ +\infty[$:
$$f'(x) = \frac{g(x^2)}{x\,(1 + x^2)^2}$$
$f$ دالة قابلة للإشتقاق على مجموعة تعريفها لأنها عبارة عن حاصل قسمة دالتين قابلتين للإشتقاق على مجموعة تعريفهما ودالتها المشتقة هي:
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \times (1 + x^2) - 2x\ln x}{(1 + x^2)^2} \\ &= \frac{1}{x} \times \frac{1 + x^2 - 2x^2\ln x}{(1 + x^2)^2} \\ &= \frac{1}{x} \times \frac{g(x^2)}{(1 + x^2)^2} \\ &= \frac{g(x^2)}{(1 + x^2)^2} \end{aligned}$$

ب) دراسة إتجاه تير الدالة $f$ وتشكيل جدول تغيراتها:
إشار المشتقة من أشارة البسط أيمن إشارة $g(x^2)$ لأن المقام موجب من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ معناه:
$g(x^2) \geq 0$ من أجل $x^2 \in ]0,\ \alpha]$ أي من أجل $x \in ]0,\ \sqrt{\alpha}]$
و $g(x^2) \leq 0$ من أجل كل عدد حقيقي $x^2 \in [\alpha,\ +\infty[$ معناه $x \in [\sqrt{\alpha},\ +\infty[$
بما أن $f'(x) > 0$ من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0,\ \sqrt{\alpha}]$ ومنه فإن الدالة $f$ متزايدة تماما على هذا المجال.
ولدينا $f'(x) < 0$ من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $[\sqrt{\alpha},\ \infty[$ ومنه فإن الدالة $f$ متناقصة تماما على هذا المجال.
وجدول تغيراتها كما يلي:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{0}{\cancel{\frac{\ln x}{x}}}}{\underset{0}{\cancel{\frac{1}{x}}} + x} = 0$$

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{\alpha}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $f(\sqrt{\alpha})$ | ↘ | $0$ |

ج) التحقق من أن: $f(\sqrt{\alpha}) = \dfrac{1}{2\alpha}$:
$$\begin{aligned} f(\sqrt{\alpha}) &= \frac{\ln(\sqrt{\alpha})}{1 + \alpha} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times \ln\alpha}{1 + \alpha} = \frac{\frac{1}{2}\cancel{\ln\alpha}}{\alpha\cancel{\ln\alpha}} \\ &= \frac{1}{2\alpha} \end{aligned}$$
لأن لدينا $g(\alpha) = 0$ معناه: $1 + \alpha - \alpha\ln\alpha = 0$
معناه: $1 + \alpha = \alpha\ln\alpha$

د) الرسم:




03 لدينا: $I_n = \int_1^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

ا) إثبات أن المتتالية $I_n$ متزايدة:

معناه

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_1^{\frac{1}{n+1}} f(x)\,dx - \int_1^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx \\ &= \int_1^{\frac{1}{n+1}} f(x)\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n+1}} f(x)\,dx \end{aligned}$$

وبما أن $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \leq 1$ الدالة $f$ سالبة من أجل كل عدد حقيقي $x \in ]0,\ 1]$ معناه $F$ متناقصة تماما على هذا المجال ومنه:

معناه: $F\left(\frac{1}{n+1}\right) > F\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n+1}} f(x)\,dx = F\left(\frac{1}{n+1}\right) - F\left(\frac{1}{n}\right) > 0$$

معناه $I_{n+1} - I_n > 0$ ومنه المتتالية $I_n$ متزايدة تماما.

ب) إثبات أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0,\ 1[$,

$\ln x \leq f(x) \leq \frac{1}{2}\ln x$:

لدينا من أجل $x \in ]0,\ 1]$ معناه $1 \leq 1 + x^2 \leq 2$ معناه

$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ معناه $\frac{\ln x}{2} \leq f(x) \leq \ln x$

لأن $\ln x \leq 0$ من أجل كل عدد حقيقي $x \in ]0,\ 1]$

ج) إستنتاج أن

$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1+\ln n}{n}\right) \leq I_n \leq 1 - \frac{1+\ln n}{n}$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x \in ]0,\ 1]$

$\frac{\ln x}{2} \leq f(x) \leq \ln x$ وكل من الدالتين $x \mapsto \ln x$ و

$x \mapsto \frac{1}{2}\ln x$ مستمرتين على المجال $\left[\frac{1}{n},\ 1\right]$ فإن:

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\ln x}{2}dx \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln x dx$$

معناه $[x\ln x - x]_{\frac{1}{n}}^{1} \leq -I_n \leq \frac{1}{2}[x\ln x - x]_{\frac{1}{n}}^{1}$

معناه $-1 + \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \leq -I_n \leq \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)$

ومنه $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1+\ln n}{n}\right) \leq I_n \leq 1 - \frac{1+\ln n}{n}$

د) إثبات أن $I_n$ متقاربة:

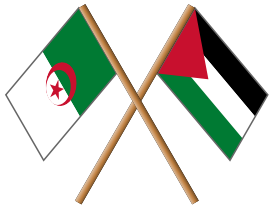
لدينا بما أن:

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1+\ln n}{n} = 1$$

و $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1+\ln n}{n}\right) = \frac{1}{2}$

معناه: $\frac{1}{2} \leq I_n \leq 1$

بما أن $I_n$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ 1 فهي متقاربة.



إنتهى الموضوع الثاني

Halim Meguellati