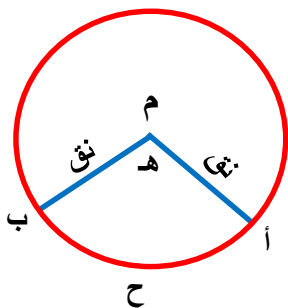


مساحة القطاع الدائري

القطاع الدائري هو جزء من سطح الدائرة محدد بقوس و نصفي قطرين



فإذا رسمنا في الدائرة م نصفي القطرين م أ ، م ب

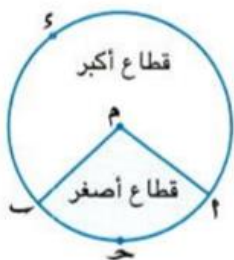
- كما في الشكل المقابل - فإن سطح الدائرة

ينقسم بهما إلى جزأين كل منهما يسمى «قطاع دائري».

• فالجزء م أ ب يسمى قطاعاً دائرياً أصغر بينما الجزء م ب ح يسمى قطاعاً دائرياً أكبر.

• وتسمى د م ب بزاوية القطاع الأصغر، د م ب المنعكسة بزاوية القطاع الأكبر.

• ويسمى أ ح ب بقوس القطاع الأصغر ، أ ب ح بقوس القطاع الأكبر.



كيف نحسب مساحة القطاع ؟

ثلاث طرق :

إذا علم القياس الستيني

$$\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{\text{س}}{360} \times \text{مساحة الدائرة}$$

إذا علم قياس طول القوس

$$\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{1}{2} \times \text{ح} \times \text{نق}$$

إذا علم القياس الدائري

$$\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{1}{2} \times \text{هـ} \times \text{نق}^2$$

مثال ١

أوجد مساحة القطاع الدائري الذي طول نصف قطره ٧ سم و زاويته

المركزية ٢,١°

الحل

$$م = \frac{1}{2} \times ه \times نق^2$$

$$م = \frac{1}{2} \times 7 \times 2,1 \times 2,1 = 51,4 \text{ سم}^2$$

مثال ٢

أوجد مساحة القطاع الدائري الذي طول نصف قطره ٦,٥ سم و طول

قوسه ٨ سم ثم أوجد محيطه

الحل

$$م = \frac{1}{2} \times ح \times نق$$

$$م = \frac{1}{2} \times 6,5 \times 8 = 26 \text{ سم}^2$$

$$المحيط = ح + 2 \times نق = 8 + 2 \times 6,5 = 21 \text{ سم}$$

مثال ٣

أوجد مساحة القطاع الدائري الذي طول نصف قطره ٧ سم و زاويته

المركزية ٦٠°

الحل

$$م = \frac{س}{360} \times مساحة الدائرة$$

$$م = \frac{60}{360} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 25,7 \text{ سم}^2$$

مثال ٤

أوجد محيط القطاع الدائري الذي مساحته ١٨ سم^٢ وطول قوسه ٣ سم

الحل

$$م = \frac{1}{2} \times ح \times نق = ١٨$$

$$ح \times نق = ٣٦$$

$$٣ نق = ٣٦$$

$$نق = ١٢ سم$$

$$المحيط = ح + ٢ نق = ٣ + ٢ \times ١٢ = ٢٧ سم$$

تدريب ١

قطاع دائري محيطه ٥٥ سم و طول نصف قطر دائرته ١٢ سم أوجد مساحته ؟

تدريب ٢

أوجد مساحة قطاع دائري طول قوسه ٨ سم و طول نصف قطر دائرته ٦,٥ سم

أوجد مساحة قطاع دائري قياس زاويته 40° و طول نصف قطر دائرته ٥ سم؟

تدريب ٣

أوجد مساحة قطاع دائري قياس زاويته 140° و طول نصف قطر دائرته ٥ سم؟

تدريب ٤

مساحة المثلث = نصف حاصل ضرب طولا ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما

تذكر أن

مساحة المثلث = نصف القاعدة ضرب الارتفاع

تذكر أن

مثال ٥

قطاع دائري طول نصف قطره ١٥ سم ، ومساحته ٢٧٠ سم^٢ أوجد :

- ١ طول قوس القطاع. ٢ قياس زاوية القطاع بالقياسين الدائري والستيني.

الحل

١ : نق = ١٥ سم ، مساحة القطاع = ٢٧٠ سم^٢ ، : مساحة القطاع = $\frac{1}{2} \times \text{نق} \times \text{ح}$

: $270 = \frac{1}{2} \times 15 \times \text{ح}$: $36 = \text{ل}$ سم

٢ : ل = ٣٦ سم ، نق = ١٥ سم : $\frac{36}{15} = \frac{\text{ح}}{\text{نق}} = \text{هـ} = ٢,٤$

: $\text{س} = \frac{180}{\pi} \times 2,4 \approx 137,5$

مثال ٦

قطاع دائري مساحته ٧٥ سم^٢ ومحيطه ٣٥ سم

أوجد طول نصف قطره وقياس زاويته المركزية بالقياس الستيني.

الحل

: مساحة القطاع = ٧٥ : $\frac{1}{2} \times \text{نق} \times \text{ح} = ٧٥$: $\text{ح} \times \text{نق} = ١٥٠$ ----- (١)

، : محيط القطاع = ٣٥ : $\text{ح} + ٢ \times \text{نق} = ٣٥$: $\text{ح} = ٣٥ - ٢ \times \text{نق}$ ----- (٢)

وبالتعويض من (٢) في (١) : $١٥٠ = \text{نق} (٣٥ - ٢ \times \text{نق})$

: $٢ \times \text{نق}^2 - ٣٥ \times \text{نق} + ١٥٠ = ٠$: $(١٠ - \text{نق}) (١٥ - ٢ \times \text{نق}) = ٠$

: نق = ١٠ سم ، : نق = $٧ \frac{1}{2}$ سم وبالتعويض في (١)

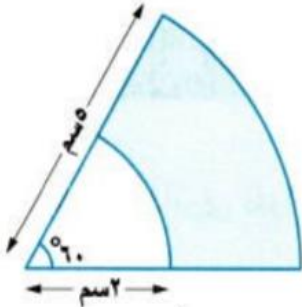
: $\text{ح} = ١٥$ سم : $\text{ح} = ٢٠$ سم : $\frac{15}{10} = \frac{\text{ح}}{\text{نق}} = \text{هـ} = ١,٥$: $\frac{20}{7,5} = \frac{\text{ح}}{\text{نق}} = \text{هـ} = ٢,٦٦$

: $\text{س} = \frac{180}{\pi} \times 1,5 \approx ٨٥,٩$: $\text{س} = \frac{180}{\pi} \times 2,66 \approx ١٥٢,٧$

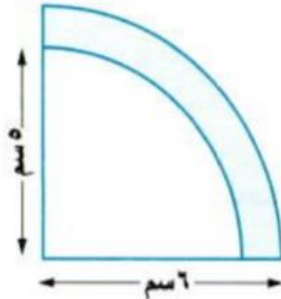
(١) قطاع دائري مساحته ١٢٠ سم^٢ ، وطوله قوسه ٢٠ سم
أوجد قياس زاويته بالقياسين الدائري والستيني وأوجد محيط القطاع.

(٢) دائرة م طول نصف قطرها ٥, ٧ سم ، رسم فيها نصف القطرين ٩ م ، ٣ م بحيث : ١ = ١٢ سم
أوجد مساحة القطاع الأصغر م ١ لأقرب سم^٢ .
« ٥٢ سم^٢ تقريباً »

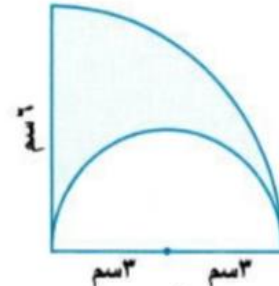
(٣) أوجد بدلالة π مساحة الجزء المظلل في كل شكل من الأشكال الآتية :



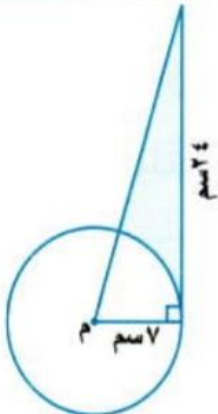
شكل (٣)



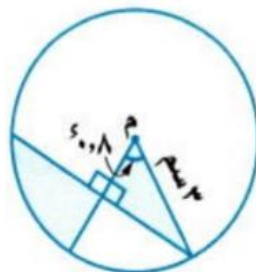
شكل (٢)



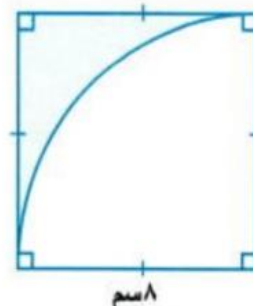
شكل (١)



شكل (٦)



شكل (٥)



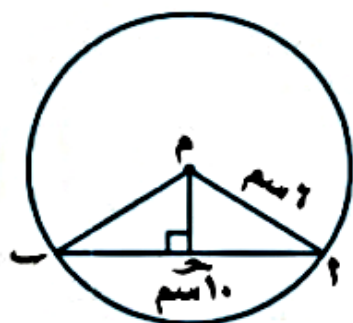
شكل (٤)

مثال ٦

دائرة M طول نصف قطرها ٦ سم ، رسم فيها نصف القطرين AM ، BM بحيث : $AB = 10$ سم
أوجد مساحة القطاع الأصغر AMB لأقرب سنتيمتر مربع.

الحل

نرسم $CM \perp AB$ يقطعه في H فيكون H منتصف AB



$$\therefore AH = HB = 5 \text{ سم}$$

$$\therefore \Delta AMH \text{ فيه : } \angle HAM = 90^\circ$$

$$\therefore \sin \angle HAM = \frac{AH}{AM} = \frac{5}{6}$$

$$\therefore \angle HAM \approx 56,4^\circ$$

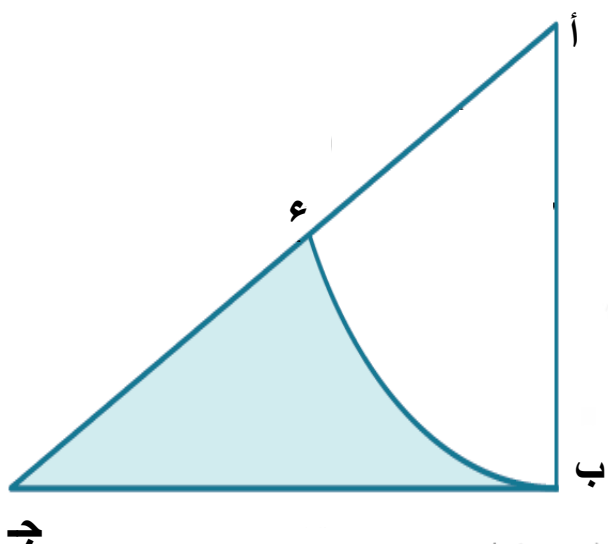
$$\therefore \angle AMB = 2 \times 56,4 = 112,88^\circ$$

$$\text{مساحة القطاع الأصغر } AMB = \frac{\pi \times 6^2 \times 112,88}{360} \approx 35,46 \text{ سم}^2$$

مثال ٧

أ ب ح مثلث قائم الزاوية في ب فيه : أ ب = ٦ سم ، ب ح = ٨ سم ، رسم قوس دائري مركزه أ وطول نصف قطر دائرته يساوي أ ب قطع أ ح في د أوجد لأقرب سم^٢ مساحة المنطقة المحصورة بين : $\overline{ب ح}$ ، $\overline{ح د}$ ، $\widehat{ب د}$

الحل



المساحة المطلوبة = مساحة $\triangle أ ب ح$ - مساحة القطاع أ ب د

إيجاد مساحة $\triangle أ ب ح$:

$$\text{مساحة } \triangle أ ب ح = \frac{1}{2} \times أ ب \times ب ح = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24 \text{ سم}^2$$

إيجاد مساحة القطاع أ ب د :

$$\therefore \text{نق} = أ ب = 6 \text{ سم ، ط (د ب أ)} = \frac{ب ح}{أ ب} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \therefore \text{و (د ب أ)} \approx 53,1^\circ$$

$$\therefore \text{مساحة القطاع أ ب د} = \pi \times \text{نق}^2 \times \frac{\text{و}}{360} = \pi \times 6^2 \times \frac{53,1}{360} \approx 17 \text{ سم}^2$$

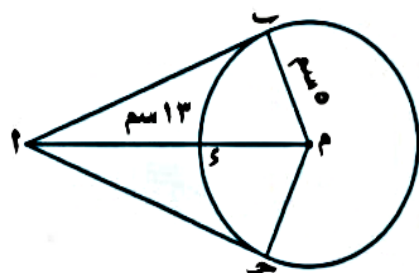
$$\therefore \text{المساحة المطلوبة} = 17 - 24 = 7 \text{ سم}^2$$

مثال ٨

١ نقطة خارج دائرة م طول نصف قطرها ٥ سم ، $م١ = ١٣$ سم ، رسمت $أ١$ ، $أ٢$ مماستين للدائرة في ب ، ح فأوجد لأقرب سم ٢ مساحة المنطقة بين : $أ١$ ، $أ٢$ ، $ب١$ ، $ب٢$

الحل

مساحة المنطقة المطلوبة = مساحة الشكل $أ١ ب م ح$ - مساحة القطاع $ب م ح$



إيجاد مساحة الشكل $أ١ ب م ح$:

$أ١ ب$ مماسة للدائرة ، $ب م$ نصف قطر فيها .

$$\therefore \angle (أ١ ب م) = 90^\circ$$

$$\text{وبالمثل } \angle (أ١ ح م) = 90^\circ$$

$$\therefore أ١ ب = أ١ ح = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ سم (فيثاغورث)}$$

$$\therefore \text{مساحة الشكل } أ١ ب م ح = 2 \times \text{مساحة } \triangle أ١ ب م = 2 \times \frac{1}{2} \times 12 \times 5 = 60 \text{ سم}^2$$

إيجاد مساحة القطاع $ب م ح$:

$$\text{في } \triangle أ١ ب م \text{ القائمة الزاوية في ب : } \sin(أ١ ب م) = \frac{5}{13} \therefore \angle (أ١ ب م) \approx 22.62^\circ$$

$$\therefore \angle (أ١ ح م) \approx 22.62^\circ \times 2 = 45.24^\circ$$

$$\therefore \text{مساحة القطاع } ب م ح = \pi \times \text{نق}^2 \times \frac{\angle}{360^\circ} = \frac{25 \times \pi}{360^\circ} \times 45.24^\circ \approx 9.89 \text{ سم}^2$$

$$\therefore \text{مساحة المنطقة المطلوبة} = 60 - 9.89 = 50.11 \text{ سم}^2$$

تدريبات

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- (١) محيط القطاع الدائري الذي طول قوسه ٤ سم وطول قطر دائرته ١٠ سم يساوى سم
 (١) ١٤ (ب) ٢٠ (ج) ٣٠ (د) ١٠
- (٢) مساحة القطاع الدائري الذي طول نصف قطر دائرته ٤ سم وطول قوسه ٦ سم
 تساوى سم^٢
 (١) ٢٤ (ب) ١٢ (ج) ١٠ (د) ٨
- (٣) مساحة القطاع الدائري الذي طول قوسه ١٠ سم وطول قطر دائرته ١٠ سم تساوى سم^٢
 (١) ٥٠ (ب) ٢٥ (ج) ١٢,٥ (د) ١٠٠
- (٤) مساحة القطاع الدائري الذي قياس زاويته ١,٢° وطول نصف قطر دائرته ٤ سم تساوى سم^٢
 (١) ٤,٨ (ب) ٩,٦ (ج) ١٢,٨ (د) ١٩,٦
- (٥) مساحة القطاع الدائري الذي قياس زاويته ١٢٠° وطول نصف قطر دائرته ٣ سم تساوى سم^٢
 (١) ٣π (ب) ٦π (ج) ٩π (د) ١٢π
- (٦) إذا كان محيط قطاع دائري ٨ سم وطول قوسه ٢ سم فإن : نق = سم
 (١) ٦ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤
- (٧) القطاع الدائري الذي محيطه ٤٤ سم وطول نصف قطر دائرته ١٤ سم
 فإن طول قوسه يساوى سم
 (١) ١٦ (ب) ٨ (ج) ٣٢ (د) ٤
- (٨) مساحة القطاع الدائري الذي محيطه ١٢ سم وطول قوسه ٦ سم تساوى سم^٢
 (١) ٦ (ب) ٩ (ج) ١٢ (د) ١٨
- (٩) مساحة القطاع الدائري الذي طول نصف قطر دائرته يساوى ٤ سم ، ومحيطه ٢٠ سم
 تساوى سم^٢
 (١) ٤٠ (ب) ٣٢ (ج) ٢٤ (د) ٤٨
- (١٠) قطاع دائري مساحته ١٥ سم^٢ وطول قوسه ٣ سم فإن : نق = سم
 (١) ٥ (ب) ١٠ (ج) ٢,٥ (د) ١٥

(١١) قطاع دائري مساحته ٤٠٠ سم^2 ، وطول نصف قطر دائرته ٢٠ سم فإن طول قوسه يساوى سم

- (١) ١٠ (ب) ٥ (ج) ٢٠ (د) ٤٠

(١٢) إذا كانت مساحة قطاع دائري تساوى ١١٠ سم^2 وقياس زاويته ٢٢°

فإن طول نصف قطر دائرته يساوى سم

- (١) ٢ (ب) ٥ (ج) ١٠ (د) ٢٠

(١٣) محيط القطاع الدائري الذى مساحته ٢٤ سم^2 ، طول قوسه ٨ سم يساوى سم

- (١) ٢٠ (ب) ١٤ (ج) ٢٢ (د) ٢٤

(١٤) قطاع دائري مساحته ٤٥ سم^2 وطول قطر دائرته ٢٠ سم ، فإن محيطه يساوى سم

- (١) ٢٩ (ب) ١٩ (ج) ٢٩ (د) ٤٩

(١٥) مساحة قطاع دائري ٢٧ سم^2 وطول نصف قطر دائرته ٦ سم

، فإن القياس الدائري لزاويته المركزية = $^\circ$

- (١) ١,٥ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤,٥

(١٦) قطاع دائري محيطه ٤ سم حيث نق طول نصف قطر دائرته ، فإن القياس الدائري لزاويته المركزية

يساوى راديان.

- (١) $\frac{1}{4}$ (ب) ٨ (ج) ٢ (د) $\frac{1}{3}$

(١٧) قطاع دائري طول قوسه (ل) وقياس زاويته $١,٢^\circ$ مرسوم داخل دائرة طول نصف قطرها (نق)

فإن محيطه = وحدة طول.

- (١) ١,٢ نق (ب) ٣,٢ نق (ج) ١,٢ نق (د) ٣,٢ نق

(١٨) قياس زاوية القطاع الدائري الذى طول نصف قطر دائرته نق سم ومساحته $\frac{\pi}{6} \text{ سم}^2$ نق $\frac{\pi}{6} \text{ سم}^2$

يساوى

- (١) 30° (ب) 60° (ج) 90° (د) 45°

(١٩) قطاع دائري محيطه ٢٤ سم وطول قوسه ١٠ سم فإن مساحة سطح الدائرة التى تحوى هذا القطاع

تساوى سم 2

- (١) 7π (ب) 14π (ج) 49π (د) 154π

(٢٠) دائرة مساحتها ٥٣,٦ سم^٢ فإن مساحة قطاع من هذه الدائرة قياس زاويته ٦٧,٥° = سم^٢

- (١) ١٠ (ب) ١١ (ج) ١٢ (د) ١٣

(٢١) دائرة مساحتها $\frac{٤٩٠}{٨}$ سم^٢ فإن مساحة قطاع من هذه الدائرة طول قوسه ٣٢ سم = سم^٢

- (١) ١٠٠ (ب) ٢٠٠ (ج) ٤٠٠ (د) ٣٠٠

(٢٢) قطاع دائري طول قوسه ٤ ل سم وطول نصف قطر دائرته نق سم فإن محيطه = سم

- (١) ل + ٢ نق (ب) نق + ٢ ل (ج) ٢ (نق + ل) (د) ٢ (ل + نق)

(٢٣) قطاع دائري طول قوسه (ل) وقياس زاويته (θ) وطول نصف قطر دائرته (نق)

فإن محيطه =

- (١) نق + ل (ب) نق + ٢ ل (ج) نق ($\theta + ٢$) (د) نق ($\theta + ١$)

(٢٤) قطاع دائري محيطه ٣٥ سم ، ومساحته ٧٥ سم^٢ فإن قياس زاويته بالقياس الدائري =°

- (١) $\frac{٢}{٣}$ ، ١ (ب) $\frac{٤}{٣}$ ، ١ (ج) $\frac{٣}{٣}$ ، ١ (د) ١ ، $\frac{١}{٣}$

(٢٥) قطاع دائري مساحته م زاد طول قطر دائرته إلى الضعف فإن مساحته تصبح باعتبار أن زاويته المركزية لا تتغير.

- (١) ٢ م (ب) ٤ م (ج) $\frac{١}{٣}$ م (د) ٣ م

(٢٦) دائرة طول نصف قطرها نق سم وكان محيط قطاع دائري فيها (٢ نق + ٨) سم

فإن مساحة هذا القطاع سم^٢

- (١) نق^٢ (ب) ٤ نق^٢ (ج) ٨ نق^٢ (د) ٤ نق

(٢٧) إذا كانت النسبة بين مساحة قطاع دائري إلى مساحة دائرته كنسبة ٢ : ٥

فإن قياس زاوية القطاع =

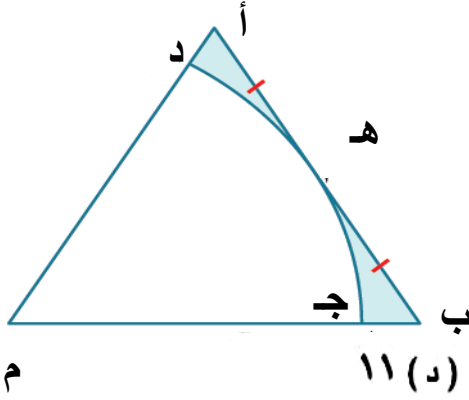
- (١) ٣٦° (ب) ٧٢° (ج) ١٠٨° (د) ١٤٤°

(٢٨) إذا كانت النسبة بين مساحة قطاع دائري إلى مساحة دائرته كنسبة ٣ : ٧ وكان محيط الدائرة يساوي

٤٢ سم فإن طول قوس القطاع = سم

- (١) ٦ (ب) ٩ (ج) ١٢ (د) ١٨

(٢٩) في الشكل المقابل :



أ مماس للدائرة م التي تمر بالنقط ح ، د ، هـ

إذا كان : أ ب = ٨ سم ، م د = ١١ سم ، طول ح هـ = ٦ سم

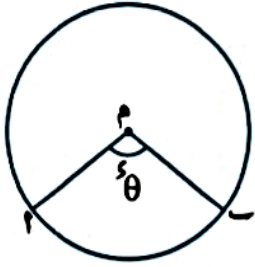
فإن مساحة الجزء المظلل = سم^٢

(ج) ١٢

(ب) ١٨

(أ) ٢٢

(٣٠) في الشكل المقابل :



إذا كان : $\frac{2}{7} = \frac{\text{مساحة القطاع الأصغر}}{\text{مساحة القطاع الأكبر}}$

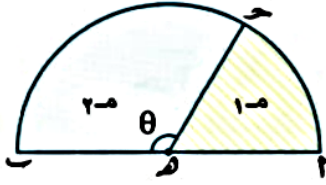
فإن $\theta = \dots\dots\dots$

(د) $\frac{\pi}{3}$

(ج) $\frac{\pi}{4}$

(ب) $\frac{\pi}{9}$

(أ) $\frac{\pi}{2}$



(د) ١٢٠°

(٣١) في الشكل المقابل :

نصف دائرة مركزها هـ

إذا كان : $\frac{2}{3} = \frac{1}{\text{م}} = \frac{1}{\text{م}} = \frac{1}{\text{م}}$

فإن : $\theta = \dots\dots\dots$

(ب) ١٠٥°

(١) ١٠٠°

(ج) ١٠٨°

(٣٢) في الشكل المقابل :

مساحة الجزء المظلل = سم^٢

(١) ١٨

(ب) $3\sqrt{2}$ ١٨

(د) π ٦

(ج) π $3\sqrt{2}$ ٩



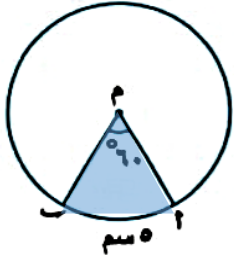
(٣٣) في الشكل المقابل : مساحة القطاع المظلل = سم^٢

(١) π ٣٠

(ب) $\frac{225}{\pi}$

(د) π ٥٠

(ج) $\frac{75}{\pi}$ ٢



(٣٤) في الشكل المقابل :

ربع دائرة مركزها م

فإن مساحة الجزء المظلل = سم^٢

(١) $\pi ١٠$

(ب) $\pi ٢٠$

(ج) $\pi ٣٠$

(د) $\pi ٤٠$

(٣٥) في الشكل المقابل :

دائرتان متحدتا المركز (م)

طولا نصف قطريهما ٤ سم ، ٦ سم

وطول $\widehat{سح} = ٩$ سم

فإن مساحة الجزء المظلل = سم^٢

(١) ١٠

(ب) $\pi ٩$

(ج) $\pi ١٢$

(د) ١٥

(٣٦) في الشكل المقابل :

مساحة الجزء المظلل = سم^٢

(١) π

(ب) $\pi ٢$

(ج) $\frac{\pi}{٣}$

(د) $\pi \frac{٢}{٣}$

(٣٧) في الشكل المقابل :

ح أ ، ح ب مماسان للدائرة م

، طول نصف قطر الدائرة م = ٨ سم

فإذا كان : $\angle م ب ح = \frac{٣}{٤} \pi$

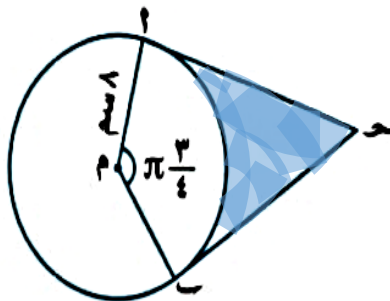
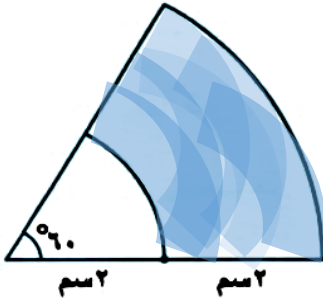
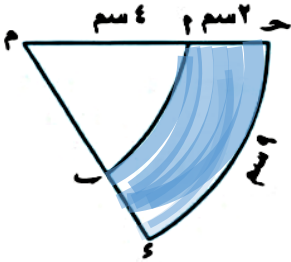
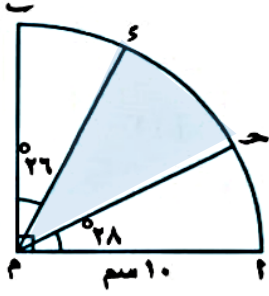
فإن مساحة الجزء المظلل = سم^٢

(١) ٧٩,١

(ب) ٩٧,١

(ج) ٧,٩١

(د) ٩,٧١



أسئلة مقالية

- ١ أوجد مساحة قطاع دائري طول قوسه ١٢ سم ، وطول نصف قطر دائرته ٨ سم « ٤٨ سم^٢ »
- ٢ قطاع دائري طول قوسه ١٦ سم وطول نصف قطر دائرته ٩ سم. أوجد مساحته. « ٧٢ سم^٢ »
- ٣ قطاع دائري قياس زاويته المركزية ٣٠° ، وطول نصف قطر دائرته ٣,٥ سم احسب لأقرب سم^٢ مساحة القطاع.
- ٤ أوجد مساحة القطاع الدائري الذي طول قطر دائرته ٢٠ سم وقياس زاويته ١٢٠° « ١٠٤,٧ سم^٢ تقريباً »
- ٥ أوجد مساحة القطاع الدائري الذي قياس زاويته ٤٠° في دائرة طول نصف قطرها ٦ سم لأقرب سم^٢ « ١٣ سم^٢ »
- ٦ قطاع دائري قياس زاويته المركزية ٤٨° وطول نصف قطر دائرته ٦ سم أوجد مساحة القطاع لأقرب سم^٢ « ١٥ سم^٢ »

٧ أوجد مساحة القطاع الدائري الذي طول نصف قطره ١٠ سم وقياس زاويته $1,2^\circ$ « ٦٠ سم »

٨ قطاع دائري طول قوسه ٧ سم ، ومحيطه ٢٥ سم أوجد مساحته. « ٣١,٥ سم »

٩ قطاع دائري محيطه ٢٨ سم ، وطول نصف قطره ٧ سم أوجد مساحته وقياس زاويته المركزية بكلا القياسين الدائري والستيني. « ٤٩ سم ، 2° ، $114,2^\circ$ »

١٠ قطاع دائري مساحته تساوي ٢٧٠ سم^٢ وطول نصف قطره يساوي ١٥ سم أوجد طول قوس القطاع وقياس زاويته المركزية بالراديان. « ٣٦ سم ، $2,4^\circ$ »

١١ قطاع دائري مساحته ٤٠ سم^٢ ، وطول قوسه ٨ سم أوجد محيطه. « ٢٨ سم »

١٢ قطاع دائري مساحته ٢٥ سم^٢ ، وقياس زاويته المركزية $0,5^\circ$ احسب طول نصف قطره وطول قوسه. « ١٠ سم ، ٥ سم »

١٣ إذا كانت مساحة قطاع دائري $= \frac{2}{9}$ مساحة دائرته فأوجد قياس زاوية القطاع بالقياس الستيني والقياس الدائري. وإذا كان طول نصف قطر الدائرة ١٠ سم فأوجد محيط القطاع لأقرب سنتيمتر. « ١٤٤ ، $2,01^\circ$ ، ٤٥ سم »