جامعة دمشق
كلية الهندسة الميكانيكية و الكهربائية
قسم هندسة التصميم الميكانيكي

امتحان الفصل الدراسي الثاني لعام ١٦\١٥
لمقرر الرياضيات (٣) -السنة الثانية
بتاريخ 2016\6\15

الاسم :
الدرجة : ٨٠
المدة : ساعتان

................................................................................................

أجب عن الأسئلة التالية :

**السؤال الأول: ٢٠ درجة**

باستخدام تبديلات مناسبة احسب قيمة التكامل الثنائي :

$$I = \iint_R \sqrt{1 - (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})}dxdy$$

حيث R المنطقة المحددة ب : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ حيث $(a > b > 0)$

**السؤال الثاني: ٢٠ درجة**

احسب قيمة التكامل الثلاثي :

$I = \iiint_R xy\, dxdydz$ حيث R النقطة المحددة ب:

$$0 \leq x \leq 1 \quad , \quad 0 \leq y \leq x \quad , 0 \leq z \leq 1 - (x + y)$$

**السؤال الثالث: ٢٥ درجة**

١. اوجد حلا للمعادلة غير الخطية $x^3 - 5x - 7 = 0$ بطريقة نيوتن – رافسون علما بانها تقبل حلاً في المجال $]2, 3[$

٢ . لتكن لدينا الدالة التجريبية $y = f(x)$ والمعطاة بالقيم الجدولية التالية :

| $x$ | 1.0 | 1.1 | 1.2 | 1.3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.841 | 0.891 | 0.932 | 0.963 |

والمطلوب احسب قيمة الدالة عند $x = 1.15$ وذلك اعتمادا على صيغة نيوتن الاولى للاستيفاء

**السؤال الرابع:(١٥ درجة )**

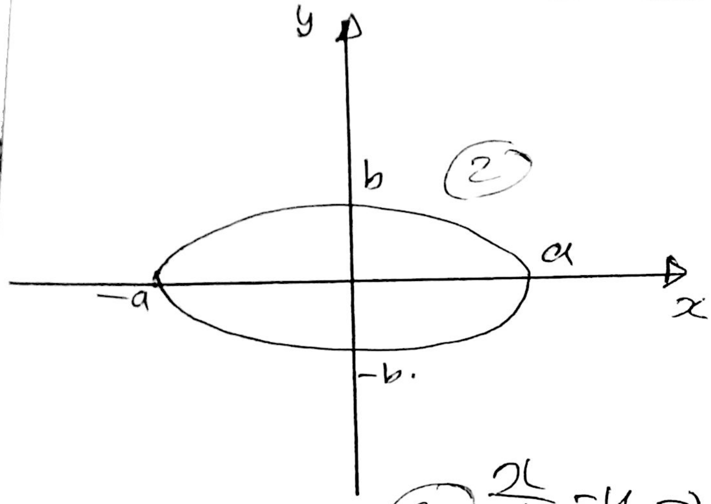
باستخدام مبرهنة غرين في المستوي احسب قيمة التكامل $I = \oint \vec{F}.\vec{dr}$ المنطقة حيث $R$ التي تحيط فيها المنحني $\gamma$ ومحددة بالمستقيمات التالية : $x = 0 \, , y = 0, x + y = 1$ وان الدالة المتجهية هي $\vec{F}(x, y) = y^3\hat{\imath} - x^3\hat{\jmath}$ .

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. جاسم كنج

سلم تصحيح مقرر الرياضيات (3) - للفصل الثاني 2015/2016
لطلاب السنة الثانية - تصحيح ميكانيك - الدرجة (80) ثمانون

السؤال الأول (20 درجة):




لنوجد التكامل على المنطقة $Q$ المحددة بالدالة

$$f(x,y)=\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2}{b^2}\right)}$$

فالمنطقة هي القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1 \quad (2)$$

فالتحويل التالي يحول القطع الناقص إلى دائرة ونصف قطرها الواحد:

$$(2)\quad \frac{x}{a}=u \Rightarrow x=au$$

$$\frac{y}{b}=v \Rightarrow y=bv.$$

$$\Rightarrow J(u,v)=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}=ab\neq 0. \quad (2)$$

$$\Rightarrow I=\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\cdot dx\,dy=\iint_{u^2+v^2\le 1}\sqrt{1-(u^2+v^2)}\cdot ab\,du\,dv \quad (2)$$

$$=ab\iint_{u^2+v^2\le 1}\sqrt{1-(u^2+v^2)}\cdot du\,dv \quad (2)$$

باستخدام الإحداثيات القطبية: $0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi$

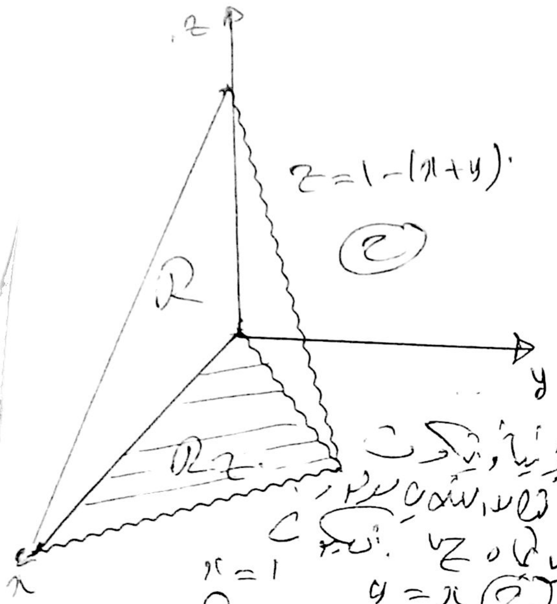
$$=ab\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=1}\sqrt{1-r^2}\cdot r\cdot dr\,d\theta \quad (2) =ab(2\pi)\left[-\tfrac{1}{3}\sqrt{(1-r^2)^3}\right]_0^1 \quad (4)$$

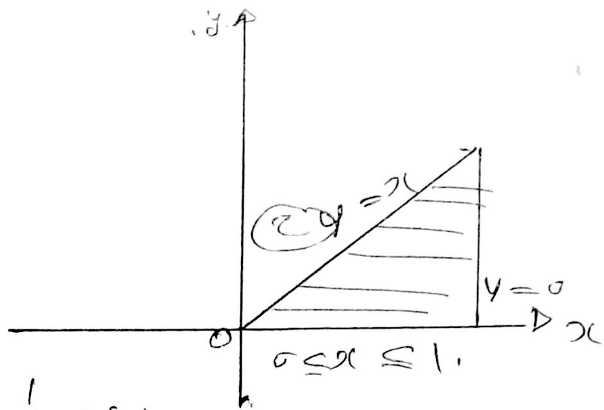
$$=ab(2\pi)\left[\tfrac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}ab. \quad (2)$$

السؤال الثاني (20 درجة):

بأن المنطقة محددة بـ $0\le x\le 1,\quad 0\le y\le x,\quad 0\le z\le 1-(x+y)$ ، احسب

ارسم المنطقة (2) !




نلاحظ أن المنطقة R محددة ومحاطة بسطح شكل رباعي وجوه من الأعلى بالمستوي ... ومن الأسفل بالمستويات الإحداثية ... الحجم ... بحيث: $z \ge 0$ ... والمنطقة ... هي المنطقة ... $R_z$ ...

$$I = \int_{x=0}^{x=1} x\,dx \int_{y=0}^{y=x} dy \int_{z=0}^{z=1-(x+y)} z\,dz = \int_0^1\int_0^x x\,dx\,dy \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{1-(x+y)}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx \int_{y=0}^{y=x} \left[1 + x^2 + y^2 - 2x + 2xy\right] dy$$

$$= 1/2 \int_0^1 \left(\frac{7}{3}x^4 - 3x^3 + x^2\right) dx = \frac{1}{40}.$$

السؤال الثالث (25 درجة):

نلاحظ أن $f(2) = -9$ ، $f(3) = 5 \Leftarrow f(2)\cdot f(3) < 0$

إذاً يوجد جذر للمعادلة في المجال $]2,3[$ نطبق طريقة نيوتن - رافسون

ولدينا صيغة التكرار:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$n = 0,1,2 \dots$

نجد ... الجذر ... تقريباً $x \approx 2.7472$

ج- نلاحظ أن ... $n=0,1$ ... $n+1=4 \Leftarrow n=3$

$$\Rightarrow P_3(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

لحساب ... $x = 1.15$

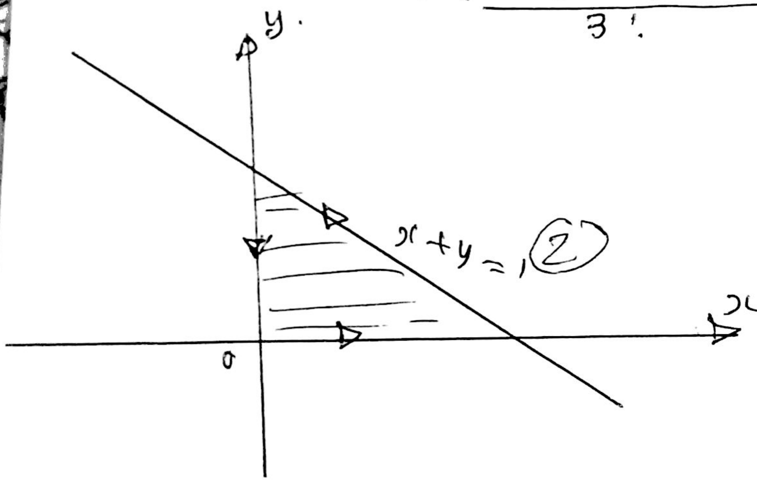
$$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1.15 - 1.0}{0.1} = 1.5$$

أولاً نكون جدول الفروق كالتالي :

| $x_i$ | $y_i$ | $\Delta y_i$ | $\Delta^2 y_i$ | $\Delta^3 y_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1.0 | 0.841 | | | |
| | | 0.050 | | |
| 1.1 | 0.891 | | −0.009 | |
| | | 0.041 | | −0.001 |
| 1.2 | 0.932 | | −0.010 | |
| | | 0.031 | | |
| 1.3 | 0.963 | | | |

7

$$\Rightarrow P_3(x=1.15) = 0.841 + (1.5)(0.050) + \frac{(1.5)(0.5)}{2!}(-0.09) + \frac{(1.5)(0.5)(-0.5)}{3!}(-0.001) = 0.8823.$$ 4




2

السؤال الرابع (١٥ درجات) :

حسب نظرية جرين التكامل الخطي :

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial x}\right) dx\,dy$$ 2

حيث ; $F_1(x,y) = x^3$

$F_2(x,y) = -x^3.$ 2

$$\Rightarrow \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial x}\right) dy\,dx = 3\iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

الآن نحدد حدود التكامل للمنطقة R كالتالي :

$0 \le x \le 1$ ، $0 \le y \le 1-x$ ; 2

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 3\int_{x=0}^{x=1}\left[\int_{y=0}^{y=1-x}(x^2+y^2)\,dy\right]dx = \int_{x=0}^{x=1}(-4x^3+10x^2-6x+1)\,dx$$ 2 2

بالتالي الشغل المبذول يساوي :

$$I = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 7/3.$$ 3

[illegible]