

# Résumé MATH

## Chapitre I

(جزء التعريف)

### Le domaine de définition

1) polynome  $\longrightarrow \mathbb{R}$

2)  $x^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

3)  $\frac{1}{x} \longrightarrow \mathbb{R}^* \Rightarrow \mathbb{R} \cdot \{0\}$

4)  $\sqrt{\square} \longrightarrow \square > 0$

5)  $\frac{\Delta}{\square} \longrightarrow \square \neq 0$

6)  $\ln(\square) \longrightarrow \square > 0$

7)  $\log(\square) \longrightarrow \square > 0$

لتحديد إشارة كسر. نستخدم جدول إشارة

$(2k'+1) \longrightarrow$  عدد فردي

$(2k') \longrightarrow$  عدد زوجي

1

Le centre de l'intervale

Le rayon

La longueur  
(l'amplitude)

$a < b$

$c = \frac{a+b}{2}$

$v = \frac{b-a}{2}$

$b-a$



# Propriétés de la fonction

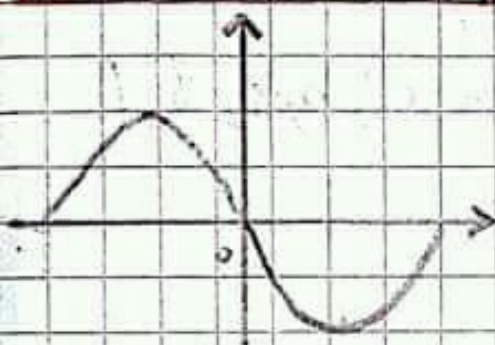
(الأنسية دالة)

imparité

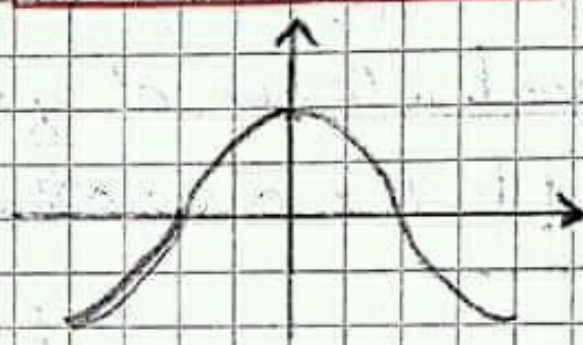
( $x \in D_f$  et  $-x \in D_f$ )

parité

$$f(-x) = -f(x)$$



$$f(-x) = f(x)$$

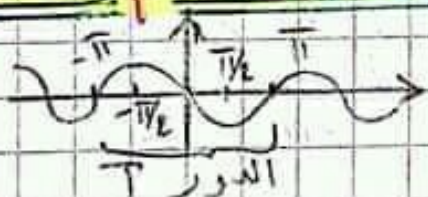


يجب تحديد  $D_f$  مسبقاً

لكي، التفاضل انما في بعض الحالات

(الدور)

La périodicité



$$f(x+T) = f(x)$$

$$\begin{cases} x \in D_f \\ \text{et} \\ x+T \in D_f \end{cases}$$

•  $\sin(x) \rightarrow T = 2\pi$

•  $\cos(x) \rightarrow T = 2\pi$

•  $\tan(x) \rightarrow T = \pi$

•  $\cos(\omega x + \varphi) \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$g(x) = \underbrace{(\cos/\sin/\tan)}_{f(x)} (\underbrace{ax^2+bx+c}_{\text{كثير حدود}})$$

$$T(g(x)) = \frac{T(f(x))}{a}$$

$> 0$



$$h(x) = f(x) + g(x)$$

3

$$T(h(x)) = \text{PPCM} \left( \frac{T(f(x))}{a}; \frac{T(g(x))}{a} \right)$$

PPCM de deux nombre; eg: القاسم المشترك الأكبر

$$\text{PPCM}(10, 12) : 10 = \cancel{2} \times 5, 12 = \cancel{2} \times 2 \times 3$$

nombre commun: 2 nombre non commun: 2, 3, 5

$$\text{PPCM} = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$$

fonctions bornées (a, b, c)

fct Majorée

$$f(x) \leq M$$

$$M \in \mathbb{R}$$

fct bornée

$$m \leq f(x) \leq M$$

$$m \text{ et } M \in \mathbb{R}$$

fct minorée

$$f(x) \geq m$$

$$m \in \mathbb{R}$$

fct croissante

$$\forall (x, x') \in D_f$$

$$x \leq x'$$

$$\Rightarrow f(x) \leq f(x')$$

fct strictement croissante

$$\forall (x, x') \in D_f$$

$$x < x'$$

$$\Rightarrow f(x) < f(x')$$



f est décroissant

$$\forall (x, x') \in Df$$

$$x < x'$$

$$\Rightarrow f(x) > f(x')$$

f est Strictement décroissante

$$\forall (x, x') \in Df$$

$$x < x'$$

$$\Rightarrow f(x) > f(x')$$

f est monotone: si f est croissant ou décroissant

f est Strictement // // Strictement // // Strictement //

f est constante:

$$\forall (x, x') \in Df, f(x) = f(x')$$

Composition de deux fcts:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] \quad g \circ f \neq f \circ g$$



# Les limites

## Chapitre II

### ① Les formes indéterminées

1<sup>ère</sup> type:  $(0 \times \infty)$ ,  $(\infty - \infty)$ ,  $(\frac{\infty}{\infty})$ ,  $(\frac{0}{0})$

~~$(\frac{a}{\infty})$~~ ;  ~~$(\frac{a}{0})$~~

2<sup>ème</sup> type:  $(1^\infty)$ ,  $(0^0)$ ,  $(\infty^0)$ ,  $(\sin(\infty))$ ,  $(\cos(\infty))$ ,  $(\tan(\infty))$

### ② Les Théorèmes

#### Théorème 01 Théorème de comparaison

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)] = l$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x)] = l'$

et si  $f(x) \leq g(x)$  alors:  $l \leq l'$

#### Théorème 02:

Si  $f(x) \leq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)] = +\infty$ , donc:

$\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x)] = +\infty$  et si  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)] = -\infty$ , donc:

$\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x)] = -\infty$

#### Théorème de l'encadrement

Si:  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$



et si :  $\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x)] = l$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} [h(x)] = l$

donc :  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)] = l$

### Théorème de fonction composée

si :  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)] = l$ , et  $\lim_{x \rightarrow l} [g(x)] = l'$

alors :  $\lim_{x \rightarrow x_0} [g \circ f] = l'$

### théorème 05

Si  $f(x) = g(x) \times h(x)$  et  $a \in \mathbb{R}$

si :  $\lim_{x \rightarrow a} [g(x)] = 0$  et  $(h(x))$  est une fct bornée

sur  $\mathbb{R}$  alors :  $\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = 0$$

### ③ limites des fonctions utiles

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x] = +\infty$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} [\ln x] = -\infty$$

ln

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} [x \ln x] = 0$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln x}{x^h} \right] = 0$$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln x + 1}{x} \right] = 1$$



$$6 \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x] = +\infty$$

$$7 \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x] = 0 \quad e$$

$$8 \lim_{x \rightarrow +\infty} [x e^{-x}] = 0$$

$$8 \lim_{x \rightarrow +\infty} [x e^{-x}] = 0$$

$$9 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{e^x}{x^n} \right] = +\infty$$

$$10 \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{e^x - 1}{x} \right] = 1$$

$$11 \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin(x)}{x} \right] = 1$$

$$12 \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \cos(x)}{x} \right] = 1$$

$$13 \lim_{x \rightarrow 0} [\cos(x)] = 1$$

$$14 \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\cos(x)} \right] = 1$$

$$15 \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x}{\sin(x)} \right] = 1$$

$$16 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \right] = e$$

$$17 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 + \frac{\alpha}{x} \right)^x \right] = e^\alpha$$

$\rightarrow (-) = e^{-\alpha}$

$$18 \lim_{x \rightarrow 0} [(1+x)^{1/x}] = e$$

Remarque:

(e)

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$e^0 = 1 = e^a \times e^{-a}$$

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

$$e^{\ln a} = a$$

(ln)

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$$

$$\ln(a^\alpha) = \alpha \ln(a)$$

قوة

$$e^{\ln a} = a$$

$$\alpha \ln(a)$$

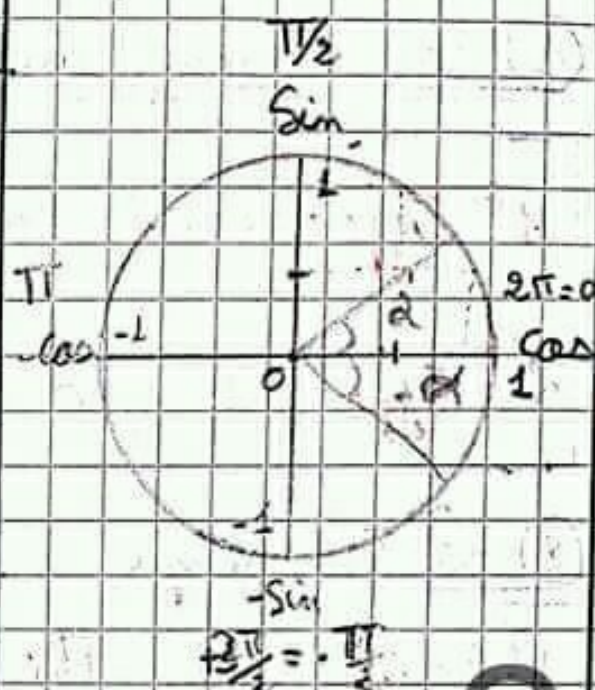
ضرب



الزوايا	0°	30°	45°	60°	90°
$\alpha$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(\alpha)$	$\frac{0}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (0.7)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (0.86)	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cot(\alpha)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	( $\infty$ )

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot \operatorname{tg} (x) \rightarrow \cos(x)$$



$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

$$\sin(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\sin(\alpha) = 1 \Rightarrow \alpha = \pi/2 + 2\pi k$$

$$\sin \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -\pi/2 + 2\pi k$$

$$\alpha = 3\pi/2 + 2\pi k$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \cos \alpha \sin \alpha$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \sin \beta \quad \begin{cases} \alpha = \beta + 2\pi k \\ \alpha = \pi - \beta + 2\pi k \end{cases}$$

$$\cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \pi/2 + 2\pi k$$

$$\cos \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 2\pi + 2\pi k = 0$$

$$\cos \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \pi + 2\pi k$$

$$\cos -\alpha = \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

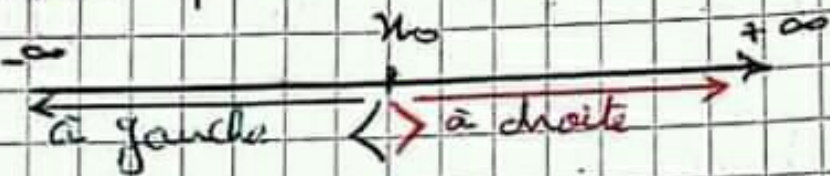
$$\cos \alpha = \cos \beta \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha = \beta + 2\pi k \\ \alpha = \beta \end{cases}$$



## La continuité

$f$  est continue en  $x_0$  si  $f$  est continue à droite et à gauche en  $x_0$ :



$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)] = f(x_0)$$

$f$  et  $g$  deux fct continue sur  $I$ , alors:

$(f \circ g), (f \times g), (f + g)$  sont continue sur  $I$   
 $(f/g)$

## Prolongement par continuité

9

Soit  $f$  une fct,  $D_f = D - \{a\}$ .  $f$  admet un prolongement par continuité si  $(\lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = l)$  existe et fini. on

note:  $\curvearrowright$

$$(f)_a = \begin{cases} f(x) & ; x \in D \\ l & ; x = a \end{cases}$$

## Théorème des valeurs intermédiaire

$f$  continue sur  $[a, b]$ ,  $k \in [f(a), f(b)] \exists c \in [a, b]$



T9 :  $(f(c) = k)$

il existe au moins un réel  $c$  si  $f$  est continue  
 il existe un unique réel  $c$  si  $f$  est continue et strictement  
 monotone  
Pour déterminer p.e.  $f(x) = 0$  a unique solution sur  
 $[a, b]$  il suffit de démontrer que :

- $f$  est continue sur  $[a, b]$
- $f$  est strictement monotone sur  $[a, b]$
- $f(a) \times f(b) < 0$

10

## La Dérivabilité (الاشتقاقية)

soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0 \in I$ . on dit que  $f$  est dérivable  
 en  $x_0$ ssi :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = f'(x_0)$$

autre écriture :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- $f$  est dérivable sur un intervalle ssi  $f$  est dérivable en  
 tout point de l'intervalle.



## l'équation de la tangente :

$$y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$$

## La dérivabilité implique la continuité

Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  alors  $f$  est continue en  $x_0$   $\longrightarrow$   $\text{المتكامل غير صحيح}$

## opérations sur les fct dérivables :

$$1) (f+g)' = f' + g'$$

$$2) (k \cdot f)' = k \cdot f'$$

$$3) (f \cdot g)' = f'g + f \cdot g'$$

$$4) \left( \frac{f}{g} \right)' = \frac{(f'g) - (f \cdot g')}{g^2}$$

$$g(x) \neq 0$$

$$5) \left( \frac{1}{f} \right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

$$f(x) \neq 0$$

## dérivées des fct usuelles :

$$1) f(x) = x \longrightarrow f'(x) = 1$$



$$2) f(x) = ax + b \rightarrow f'(x) = a$$

$$3) f(x) = x^n \quad (n \geq 1) \rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$$

$$4) f(x) = \frac{1}{x^n} \quad (n \geq 1) \rightarrow f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

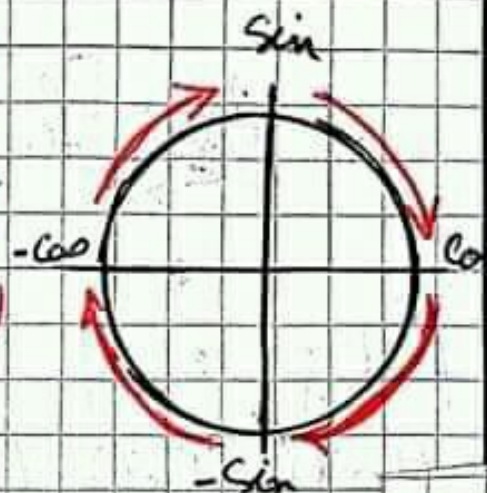
$$5) f(x) = \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$6) f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos(x)$$

$$7) f(x) = \cos(x) \rightarrow f'(x) = -\sin(x)$$

$$8) f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$$

$$9) f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$



derivée d'une fct composée

$$(g \circ f)' = f'(x) \times g'(f(x))$$

derivée d'une fct réciproque

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

La fct réciproque

$$Df^{-1} = f(Df)$$

l'expression de  $f^{-1}$

نبحث عن عبارة  $x$  بدلالة  $y$   $f(x) = y \Rightarrow y$  دار كما يوجد حل فوضه ليني الـ  $f^{-1}$



$$10. (\arcsin(x))' \longrightarrow \frac{+1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$11. (\arccos(x))' \longrightarrow \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$12. (\arctan(x))' \longrightarrow \frac{1}{1+x^2}$$

13



## Théorème de Rolle:

Soit  $f$  une fct

- ① continue sur  $[a, b]$   
② Dérivable sur  $]a, b[$   
③ si  $f(a) = f(b)$
- } il existe au moins  
un  $c \in ]a, b[ \cap \mathbb{R}$   
 $f'(c) = 0$

## Théorème des accroissements finis:

Soit  $f$  une fct

continue sur  $[a, b]$

dérivable sur  $]a, b[$

si  $f(a) \neq f(b)$

} il exist au moins un  $c$

$\in ]a, b[ \cap \mathbb{R}$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

## Théorème des accroissements finis généralisé:

Soit  $f$  et  $g$ : continue et dérivable sur  $[a, b] \cap \mathbb{R}$ :

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

$$g(a) \neq g(b)$$

il existe un  $c \in ]a, b[ \cap \mathbb{R}$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$



# La Règle de l'Hospital.

15

① Si  $f$  et  $g$  - 2 fct définies et dérivables sur un voisinage  $(I) \Rightarrow$

② Si la question  $\frac{f'(n)}{g'(n)}$  ou  $\frac{g'(n)}{f'(n)}$  sont définie

③ Si on a une F.I de type  $\frac{0}{0}$  ou  $\frac{\infty}{\infty}$  ; alors :

$$\lim_{n \rightarrow n_0} \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{f'(n_0)}{g'(n_0)} \rightarrow \text{Si on a F.I } \left( \frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow n_0} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow n_0} \frac{f'(n)}{g'(n)} \rightarrow \text{Si on a F.I } \left( \frac{\infty}{\infty} \right)$$